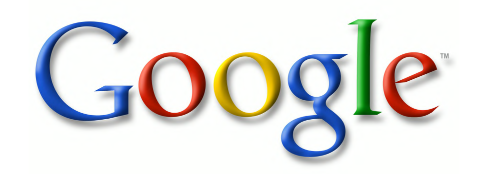
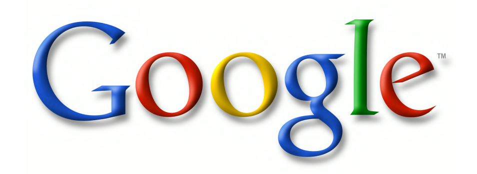
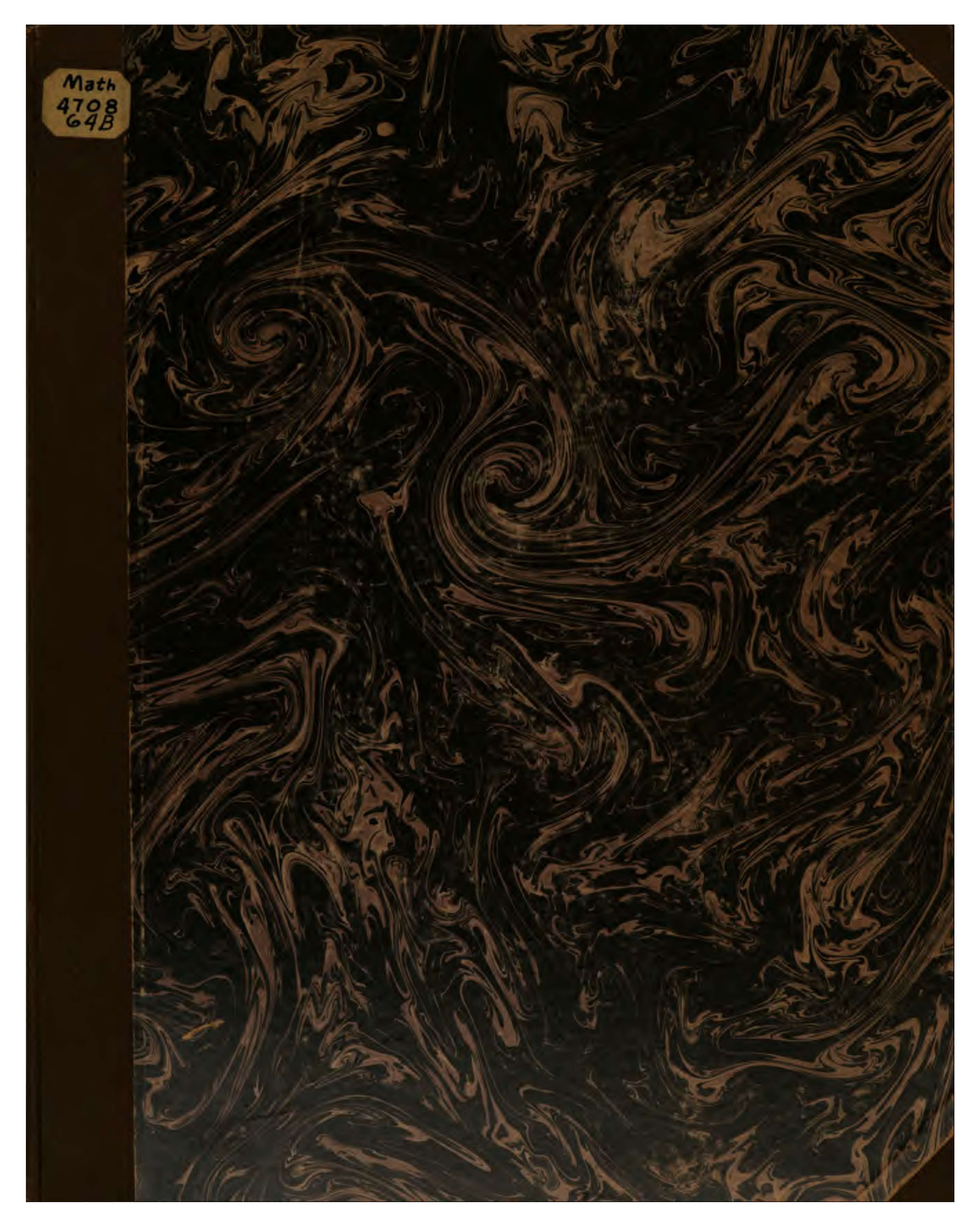
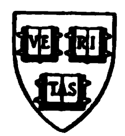
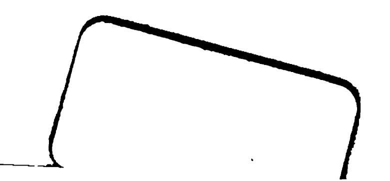



Google


Math
4708
64B



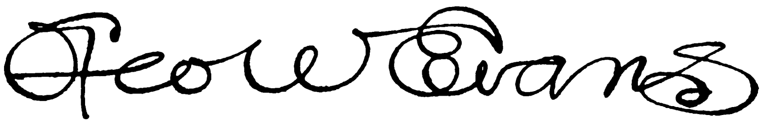


ÜBER

VIELECKE UND VIELFLACHE.

ÜBER

VIELECKE UND VIELFLACHE.



VON

DR. CHRISTIAN WIENER,
PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU CARLSRUHE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1864.

Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit den Vielecken und Vielflachen höherer Art und den damit zusammenhängenden Fragen. Die Grundzüge eines Theiles dieses Gegenstandes wurden von M. Poinsot festgestellt, ein anderer Theil gehört ganz dem Verfasser an. Ersteres geschah in dem 1809 verlesenen „mémoire sur les polygones et les polyèdres" (Journal de l'école polytechnique, 10. cahier, p. 16), in welchem Poinsot insbesondre auch zu den bis dahin als die einzig möglichen anerkannten 5 regelmässigen Körpern noch 4 weitere von ihm entdeckte zufügte, die mit demselben Rechte zu den regelmässigen gezählt werden müssen, als zu den regelmässigen Vielecken das Sternfünfeck gehört, dessen Seiten Sehnen von $\frac{2}{5}$ des Kreisumfangs sind. Den Beweis, dass diese 4 Vielflache höherer Art die einzig weiter möglichen regelmässigen Vielflache sind, lieferten A. L. Cauchy in seinen 1811 verlesenen „recherches sur les polyèdres" (Journ. de l'école polyt., 16. cah., p. 68) und M. J. Bertrand in seiner 1858 verlesenen „note sur la théorie des polyèdres réguliers" (Comptes rendus, t. 46, p. 79), indem er, Cauchy's Beweise folgend, darin an die Stelle der Flächen die reciproken Ecken setzte. Ich habe im Folgenden den Weg Bertrands eingeschlagen und den als Grundlage dienenden Hülfssatz, welcher dort nur ausgesprochen ist, mit dem mir nothwendig scheinenden Beweise versehen. — Den Begriff des Flächeninhalts eines regelmässigen Sternvielecks fasste A. Cayley in seiner Note „on Poinsot's four new Regular Solids" (Philosophical magazine, vol. 17, 1859, p. 123) anders als Poinsot auf, und diese Aendrung fand ich dadurch fruchtbar, dass sie auf einige Entwicklungen Poinsots angewandt, diesen die bis dahin fehlende Gültigkeit für alle regelmässigen Vielflache ertheilte.

Das Studium der Poinsot'schen Vielflache bietet dadurch eine Schwierigkeit, dass nirgends, so viel mir bekannt, Zeichnungen derselben bestehen. Ueber das Vorhandensein von Modellen habe ich nur eine Bemerkung Bertrands in obiger Note gefunden, nach welcher es solche in Paris gibt. Ich habe nun Zeichnungen der Vielflache und Netze ihrer äusserlich sichtbaren Theile entworfen, nach denen ich mir Modelle anfertigte. Die Zeichnungen, durch welche das Verständniss wesentlich erleichtert werden dürfte, theile ich hier mit. Die schönen grösseren Modelle für unsre

polytechnische Schule, ebenfalls aus den Netzen hergestellt, verdanke ich Herrn Max Doll, Assistenten der darstellenden und praktischen Geometrie, welcher auch gerne bereit ist, solche auf Bestellung zu liefern.

In den Nummern 4—7 und 10—22 habe ich einige Sätze aufgestellt und bewiesen, die meines Wissens noch nicht ausgesprochen wurden. Dieselben beziehen sich hauptsächlich auf die Anzahl der Doppelpunkte eines Vielecks und auf die Anzahl seiner Schnittpunkte mit einer Geraden und gelten auch für krumme Linien.

Carlsruhe, im Juli 1864.

Chr. Wiener.

Inhalt.

I. Ueber ebene Vielecke.

II. Ueber Vielflache.

I. Ueber ebene Vielecke.

1. Unter einem vollständigen ebenen Vieleck oder Polygon der $n$ten Ordnung oder einem vollständigen ebenen n-Eck versteht man n Punkte in einer Ebene, welche nicht in Einer Geraden liegen, und die Gesammtheit der Geraden, welche dieselben durch ihre Verbindung bestimmen.

Unter einem vollständigen ebenen Vielseit der $n$ten Ordnung oder einem vollständigen ebenen n-Seit versteht man n Gerade in einer Ebene, welche nicht durch Einen Punkt gehen, und die Gesammtheit der Punkte, welche dieselben durch ihre Durchschnitte bestimmen.

Unter einem einfachen ebenen Vieleck oder Vielseit der $n$ten Ordnung oder einem einfachen ebenen n-Eck oder n-Seit versteht man n Punkte in einer Ebene, welche nicht in Einer Geraden liegen, und den Zug der n Strecken, welcher von einem der Punkte zu einem andren schreitend, jeden einmal durchläuft und sich durch die Rückkehr zum Ausgangspunkte schliesst. Jeder der n Punkte heisst ein Eck, jede der gezogenen Strecken eine Seite des n-Ecks oder n-Seits. Das einfache n-Eck hat auch n Seiten, von denen zwei in jedem Eck zusammenstossen. Das einfaché n-Seit hat auch n Ecken, von denen zwei jede Seite begrenzen. Wir werden von den beiden Namen für dasselbe Gebilde in Zukunft den Namen „n-Eck" gebrauchen.

Das einfache n-Eck ist schief, wenn die n Punkte nicht in einer Ebene liegen. Bei vollständigen räumlichen Vielecken kommen auch die zu legenden Ebenen in Betracht, so dass diese Gebilde mit den Vielflachen reciprok sind. Hier sprechen wir nur von einfachen ebenen Vielecken und wollen daher unter Vielecken immer diese verstanden wissen.

2. Bei einem Vieleck bilden die zwei in einem Eck zusammenstossenden Seiten, ohne verlängert zu werden, zwei Winkel, welche sich zu 4 Rechten ergänzen. Um die n zusammengehörigen Winkel des Vielecks zu unterscheiden, denken wir uns eine Seite so verlängert, dass ihre ganze Länge gleich dem Umfange des Vielecks ist, und unterscheiden die beiden Seiten dieser Geraden, etwa mit Farben, oder als rechte und linke für den auf der Linie vorwärts Schreitenden, brechen dann die Gerade um ein Eck nach dem andern in der durch das Weiterschreiten bedingten Folge, bis sie mit dem ganzen Umfang zusammengefallen ist, und nennen nun die n von derselben Seite der Geraden, der rechten oder der linken, gebildeten Winkel die Vieleckswinkel. Wir wollen, um Verwechslungen zu vermeiden, einmal für allemal und ausnahmslos die linke Seite wählen, so dass die Vieleckswinkel stets auf der linken Seite des den Umfang Umschreitenden liegen. Da aber die Richtung des Umschreitens noch gewählt werden kann, so stehen doch noch die beiden Möglichkeiten offen. Wir wollen nun in der Regel, insbesondere wenn durch irgend welche Umstände die Richtung des

Umschreitens nicht vorgeschrieben ist, den Umfang so durchschreiten, dass die Summe W der auf der linken Seite liegenden Vielecks- oder Innenwinkel die kleinere von beiden möglichen Summen ist. Es entspricht diess dem allgemeinen Gebrauche bei gewöhnlichen Vielecken. Da die Summe der auf der rechten Seite liegenden Winkel $4n\text{R}-W$ beträgt, so muss in diesem Falle $W < 4n\text{R}-W$ oder $W < 2n\text{R}$ sein.

3. Unter den Aussenwinkeln versteht man diejenigen Winkel, von denen jeder an einem Ecke durch eine Seite und die Verlängerung der hier anstossenden gebildet wird, und der daher der Neben- oder Supplementwinkel des an demselben Ecke liegenden Innenwinkels ist. Ein Aussenwinkel ist positiv oder negativ, je nachdem der zugehörige Innenwinkel kleiner oder grösser als 2 Rechte ist. Da ein Vieleckswinkel kleiner als 4 Rechte, so ist ein Aussenwinkel seinem Masse nach kleiner als 2 R; er liegt zwischen + 2 R und — 2 R. Wir wollen die Seiten des Vielecks in der Richtung des Durchlaufens verlängern; dann ist der Aussenwinkel an einem Ecke gleich der Drehung, welche die herumgebrochene Gerade an diesem Eck erleidet; er ist positiv, wenn diese Drehung nach links, negativ, wenn sie nach rechts erfolgt.

Die algebraische Summe S der Aussenwinkel ist eine ganze Anzahl von 4 Rechten, oder es ist $S = a \, . \, 4\,\text{R}$, worin a eine ganze Zahl. Denn biegt man die Gerade auf dem ganzen Vieleck herum, so dass sie der Reihe nach mit jeder Seite zusammenfällt, so muss sie, weil sie in ihre erste Lage zurückkehrt, den ganzen Winkelraum eine ganze Anzahl mal durchlaufen.

4. Wir wollen zu einem Vieleck als erste Figur eine andre bilden, welche die zweite heissen soll, indem wir von einem beliebigen Punkte aus Parallele mit allen Seiten des Vielecks und zwar in der Richtung, in welcher sie durchlaufen werden, ziehen. Eine Seite und ihre Parallele sollen entsprechend heissen. Die Entsprechenden zweier aufeinanderfolgenden Seiten bilden dann zwei Winkel, welche sich zu 4 R ergänzen. Der kleinere von beiden, der also kleiner als 2 R, ist gleich dem durch die Seiten gebildeten Aussenwinkel. Solche gleiche Winkel in beiden Figuren mögen ebenfalls entsprechend heissen. Das Zeichen dieser Winkel lassen wir naturgemäss mit dem der Aussenwinkel übereinstimmen; es ist demnach positiv, wenn die weniger als 2 R betragende Drehung der Entsprechenden einer Seite nach der der folgenden nach links, negativ, wenn sie nach rechts erfolgt. Fig. 2 und 3 sind derartige zweite Figuren zu den Vielecken in Fig. 1 und 4.

5. In jeder zweiten Figur zu einem Vielecke wird jede von der Mitte aus einseitig gezogene Gerade G a mal mehr in dem Sinne überschritten, in welchem a Umdrehungen stattfinden, als in dem entgegengesetzten. Findet irgendwo eine solche entgegengesetzte oder rückschreitende Drehung statt, so muss sie durch zwei Wendegerade begrenzt sein, an deren einer die vorschreitende Drehung in die rückschreitende, und an deren anderer die rückschreitende in die vorschreitende umwendet. Daher müssen solche Wendegeraden paarweise oder in gerader Anzahl vorhanden sein. Betrachtet man zwei von einer Wendegeraden ausgehende, also entgegengesetzte Drehungen, so decken sie sich, soweit die kleinere reicht, ganz, und wenn man sie beide weglässt, so bleiben a und der Ueberschuss der Anzahl der vorwärts- und der rückwärtsgerichteten Ueberschreitungen einer jeden Geraden G ungeändert. Zugleich wird die Anzahl der Wendegeraden um 2 vermindert. Entfernt man so alle Paare von Wendegeraden, so bleiben nur a vorwärtsgehende Umdrehungen übrig, wobei sich übereinstimmend mit Nr. 3 ergibt, dass a eine ganze Zahl

ist, weil die Endlage der sich drehenden Geraden mit der Anfangslage zusammenfällt. Dann wird jede Richtung G $a$mal vorwärts, und daher wird sie bei der ursprünglichen Figur a mal mehr vorwärts als rückwärts überschritten.

6. Man nennt n die **Ordnung** und a die **Art** des Vielecks. Ein 7-Eck z. B., dessen Seite 3mal den Winkelraum durchläuft, ist von der 7. Ordnung und der 3. Art.

Die gewöhnlichen Vielecke sind von der ersten Art. Fig. 8 und 9 zeigen ein 7-Eck von der 2. und 3. Art. a kann auch Null sein; dann muss aber $n > 3$, damit das Vieleck geschlossen wird. Um z. B. ein Viereck 0ter Art zu bilden, theile man (Fig. 1) einen Winkel, der, damit das Viereck geschlossen werden kann, grösser als 2 R ist, auf 2 Arten in 2 Theile, so dass jeder Theil kleiner als 2 R, und betrachte die 4 entstandenen Winkel als die Aussenwinkel eines Vierecks. Die Summe derselben ist dann Null, und ein geschlossenes Viereck (Fig. 2) mit parallelen und gleichgerichteten Seiten kann gebildet werden.

Es kann auch a negativ sein; aber wir erhalten dadurch keine neue Art von Vielecken; denn ein Vieleck von der $a$ten Art ist zugleich ein solches von der $-a$ten Art, wenn man die Vieleckswinkel auf die andere Seite des Umfangs verlegt. Dadurch erhält jeder Aussenwinkel und in Folge dessen auch a das entgegengesetzte Zeichen, ohne dass das Vieleck selbst ein anderes wird. Sollen beim Umlaufen die Vieleckswinkel stets auf der linken Seite liegen, wie wir angenommen haben, so wird das Umkehren des Zeichens von a durch Umkehren der Umlaufsrichtung hervorgebracht. Ist diese Umlaufsrichtung willkürlich, so kann ein Vieleck immer als ein solches von positiver Art betrachtet werden; ist die Umlaufsrichtung dagegen vorgeschrieben, so müssen wir die positive und negative Art unterscheiden.

7. **Um die Art a eines vorliegenden Vielecks zu bestimmen**, bilde man zu ihm die zweite Figur, so gibt nach Nr. 5 der Ueberschuss der Anzahl der positiven über die der negativen Ueberschreitungen einer Geraden G das Zeichen und die Grösse von a. Bezeichnet man die beliebige Richtung G mit „abwärts“, so ist bei einer positiven Ueberschreitung von G die unmittelbar vorher durchlaufene Gerade nach links, die unmittelbar nachher durchlaufene nach rechts gekehrt. Die Vielecksseiten, denen sie entsprechen, haben dieselbe Richtung, bilden daher einen äussersten Eckpunkt links, indem sie beide rechts von der durch das Eck gelegten Lothrechten liegen; zugleich ist der gebildete Vieleckswinkel offenbar ausspringend. Dagegen entspricht einer negativen Ueberschreitung von G ein äusserster Punkt rechts des Vielecks mit einspringendem Vieleckswinkel. Daher ergibt sich a aus dem Vieleck selbst als der Ueberschuss der Anzahl der äussersten Eckpunkte links mit ausspringendem Vieleckswinkel über die Anzahl der äussersten Eckpunkte rechts mit einspringendem Vieleckswinkel. Dabei ist klar, dass, wenn eine lothrechte Seite des Vielecks vorhanden ist, deren anliegende Seiten beide rechts oder links von ihr liegen, diese Seite oder Ein Endpunkt derselben als ein äusserster Eckpunkt rechts oder links gezählt werden muss; dass dagegen, wenn von den anliegenden Seiten eine rechts, die andre links liegt, entweder beide Endpunkte oder keiner derselben als solche Punkte zu zählen sind. Wir wollen uns für das letztere als das einfachere entscheiden.

8. Die Summe der Vieleckswinkel W eines n-Ecks ist gleich n . 2 Rechte weniger der Summe der Aussenwinkel, weil jeder Winkel gleich 2 R weniger dem Aussenwinkel, oder

$$W = n \,.\, 2\,\mathrm{R} - a \,.\, 4\,\mathrm{R} = (n - 2\,a) \,.\, 2\,\mathrm{R}. \tag{1}$$

Da bei einem Vieleck a sowohl positiv als negativ genommen werden kann, so folgt, dass, wenn W der kleinere von beiden dadurch möglichen Werthen sein soll, a positiv sein

muss. Für $a = 0$ sind beide Werthe gleich, so dass die Winkel eines Vielecks 0ter Art auf jeder Seite des Umfangs dieselbe Summe haben.

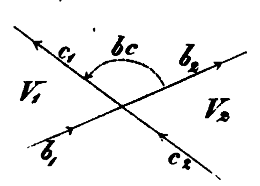
Da W jedenfalls positiv ist und nicht Null sein kann, so muss wegen Gleichung (1) $n > 2a$ oder $a < \frac{n}{2}$; oder die Zahl, welche die Art eines Vielecks ausdrückt, muss kleiner als die halbe Anzahl der Seiten sein. Für ein n-Eck ist W um so grösser, je kleiner a. Der grösste Werth, den die Winkelsumme eines n-Ecks annehmen kann, $W = n \,.\, 2\,\mathrm{R}$, tritt für $a = 0$ ein. Der kleinste Werth wird später bestimmt.

9. Ein Vieleck ist nach der gewöhnlichen Begriffsangabe convex, wenn es von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, oder wenn es nur auf Einer Seite einer jeden verlängerten Seite liegt. Diese Bedingungen fallen, wie in Nr. 21 bewiesen werden wird, sowohl unter einander, als auch mit der andren zusammen, dass das Vieleck erster Art und dass jeder Vieleckswinkel kleiner als 2 Rechte oder ausspringend, oder dass jeder grösser als 2 R oder einspringend oder überstumpf ist. Die Unterscheidung von convex und nicht convex ist bei Vielecken andrer als erster Art nicht möglich, wenn man eine der beiden ersten Begriffsangaben anwendet, weil diese Vielecke von einer Geraden stets in mehr als zwei Punkten geschnitten werden; die Unterscheidung ist aber dieselbe für alle Arten von Vielecken bei Geltung des letzten Begriffes. Da nun der Begriff des Vielecks gegen den gewöhnlichen, der nur solche erster Art umfasst, erweitert wurde, so muss folgerichtig ein Begriff für convex aufgestellt werden, welcher auch für diese Erweiterung zulässig ist, und desswegen sagen wir: Ein Vieleck ist convex, wenn jeder Winkel desselben kleiner oder wenn jeder grösser als zwei Rechte ist.

Es gibt keine convexen Vielecke der 0ten Art, da letztere Aussenwinkel von entgegengesetztem Zeichen, also ausspringende und einspringende Vieleckswinkel haben müssen.

10. Ein Doppelpunkt eines Vielecks ist ein solcher Punkt, der zweien nicht aneinanderstossenden Seiten desselben gemein ist.

Zerlegt man ein Vieleck V der $a$ten Art durch einen Doppelpunkt in zwei Vielecke V_1 und V_2, deren Art a_1 und a_2 ist, wenn man sie in demselben Sinne, wie als Bestandtheile von V durchläuft, so ist $a = a_1 + a_2$.



Sind b und c die im Doppelpunkt sich schneidenden Seiten, sind b_1 und c_1 deren Bestandtheile in V_1, b_2 und c_2 die in V_2, und beginnt man bei c den Umlauf um V, so sei, wenn man in b angekommen ist, u_1 die Anzahl der beschriebenen Umdrehungen. Um V_1 ganz durchlaufen zu haben, fehlt noch die Drehung $bc = bc$ aus b_1 in c_1, so dass

$$u_1 + bc = a_1.$$

Durchläuft man aber V von b aus weiter, bis man in c angelangt ist, von Neuem u_2 Umdrehungen beschrieben und den Umlauf um V vollendet hat, so muss zu der zweiten Bewegung, um V_2 umlaufen zu haben, noch die Drehung $cb = -bc$ von c_2 in b_2 zugefügt werden, so dass

$$u_2 - bc = a_2.$$

Und da $a = u_1 + u_2$, so ist auch

$$a = a_1 + a_2.$$

11. Unter *Diagonale* eines Vielecks versteht man gewöhnlich die gerade Verbindungslinie zweier Ecken, welche nicht an einer Seite liegen. Wir wollen in den folgenden Sätzen unter Diagonale die gerade Verbindungslinie zweier Punkte des Vielecks, welche nicht auf Einer Seite liegen, verstehen. Wir wollen diese Erweiterung des gewöhnlichen Begriffes dadurch herbeiführen, dass wir in ihm als Eck jeden Punkt des Vielecks zulassen, an welchem dann der Vieleckswinkel möglicherweise 2 R ist.

Zerlegt man ein Vieleck V der $a$ten Art durch eine Diagonale in zwei Vielecke V_1 und V_2, deren Art a_1 und a_2 ist, wenn man sie in demselben Sinne, wie als Bestandtheile von V durchläuft, so ist $a = a_1 + a_2 - 1$, wenn die Diagonale innerhalb der beiden Vieleckswinkel ihrer Endpunkte liegt, es ist $a = a_1 + a_2 + 1$, wenn sie ausserhalb dieser beiden Winkel liegt, und es ist $a = a_1 + a_2$, wenn sie innerhalb des einen und ausserhalb des andren von beiden liegt.

Sei d die Diagonale zwischen den Ecken β und γ mit den anstossenden Seiten b_1, b_2 und c_1, c_2, welche in der Folge b_1, $b_2 \ldots c_1$, c_2 durchlaufen werden, beginne das Durchlaufen des ganzen Vielecks in der Seite c_2 und sei, wenn man in b_1 angelangt ist, die Anzahl der beschriebenen Umdrehungen u_1, so wird das Vieleck V_1 vollständig beschrieben sein, wenn noch die Drehung von b_1 in d ($= b_1\, d$) und von d in c_2 ($= d\, c_2$) zugefügt wird. Daher

$$a_1 = u_1 + b_1\, d + d\, c_2.$$

Geht man aber von b_1 zu b_2 mit der Drehung $b_1\, b_2$ über und fährt fort V zu umlaufen, und hat von b_2 bis c_1 wieder u_2 Umdrehungen beschrieben, so muss man zu u_2 noch die Drehungen $c_1\, d$ und $d\, b_2$ zufügen, um V_2 beschrieben zu haben; daher

$$a_2 = u_2 + c_1\, d + d\, b_2.$$

Geht man aber von c_1 zu c_2 mit der Drehung $c_1\, c_2$ über, so ist V beschrieben. Daher

$$a = u_1 + b_1\, b_2 + u_2 + c_1\, c_2.$$

Daraus folgt

$$a = a_1 + a_2 + b + c,$$

wenn $\quad b = b_1\, b_2 - b_1\, d - d b_2$

und $\quad c = c_1\, c_2 - c_1\, d - d c_2.$

Nun ist aber, wenn b_1' die Verlängerung von b_1 über β, unter allen Umständen Drehung $b_1\, b_2 =$ Winkel $b_1'\, b_2$,

oder $\quad b_1\, b_2 = \text{W.}\ b_1'\, b_2,$

und ebenso $\quad - b_1\, d = - \text{W.}\ b_1'\, d,$

wobei diese Winkel als Aussenwinkel kleiner als 2 R und positiv oder negativ sind, je nachdem sie vom ersten zum zweiten Schenkel durch eine Drehung nach links oder nach rechts beschrieben werden.

Daher ist $b_1\, b_2 - b_1\, d = \text{W.}\ b_1'\, b_2 - \text{W.}\ b_1'\, d = \text{W.}\ d b_1' + \text{W.}\ b_1'\, b_2 = \text{W.}\ d b_1'\, b_2$, oder es ist $b_1\, b_2 - b_1\, d$ unter allen Umständen gleich dem W. $d b_1'\, b_2$, der durch Drehung des d in b_1' und von da in b_2 stets um den Drehpunkt β erzeugt wird. Liegen b_2 und d auf derselben Seite von $b_1\, b_1'$, so ist $b_1\, b_2 - b_1\, d = \text{W.}\ d b_1'\, b_2$ derjenige Winkel $d\, b_2$, der

kleiner als 2 R; liegen sie dagegen auf verschiedenen Seiten von $b_1 b_1'$, so ist $b_1 b_2 - b_1 d$ $=$ W. $db_1' b_2$ derjenige Winkel db_2, welcher b_1' in sich schliesst. In keinem Falle kann W. $d b_1' b_2$ die Seite b_1 in sich schliessen. Ferner ist, wenn d' die Verlängerung von d über β,

$$- d b_2 = - \text{W. } d' b_2 = \text{W. } b_2 d',$$

der stets kleiner als 2 R oder als $\frac{1}{2}$ Umdrehung ist.

Daher $$b = \text{W. } d b_1' b_2 + \text{W. } b_2 d' = \text{W. } d b_1' b_2 d'.$$

Oder b ist der Winkel mit dem Scheitel β, welcher durch Drehung des d durch b_1' und b_2 in d' beschrieben wird. Er ist, weil die Grenzschenkel Verlängerungen von einander sind, wenn man ihn durch 4 R als Einheit misst, jedenfalls $= \pm \frac{1}{2}$, da jede der 3 Drehungen $< \frac{1}{2}$ ist; das Zeichen hängt von der Lage des b_1' und b_2 gegen d ab.

Liegt d innerhalb des Winkels $b_1 b_2$, so folgen bei negativer Drehrichtung aufeinander b_1, d, b_2. Bei positiver Drehrichtung kann daher d nur mit Durchschreitung von b_1 nach b_2 gelangen. Da aber b_1 bei Beschreibung des Winkels $d b_1' b_2$ keinenfalls durchschritten werden darf, so ist W. $d b_1' b_2$ negativ. Da ferner W. $d b_1' b_2 +$ W. $b_2 d' = \pm \frac{1}{2}$, und, ohne Beachtung des Zeichens, W. $b_2 d' < \frac{1}{2}$, so muss die Summe das Zeichen des ersten Gliedes haben, oder es ist diese Summe $= b = - \frac{1}{2}$.

Liegt d ausserhalb des Winkels $b_1 b_2$, so folgen bei negativer Drehrichtung aufeinander b_1, b_2, d. Bei negativer Drehrichtung kann daher d nur mit Durchschreitung von b_1 nach b_2 gelangen. Da aber b_1 bei der Beschreibung des Winkels $d b_1' b_2$ nicht durchschritten werden darf, so ist W. $d b_1' b_2$ positiv, und es muss dann, ebenso wie vorhin, $b =$ W. $d b_1' b_2 d'$ dasselbe Zeichen haben, oder es ist $b = + \frac{1}{2}$.

Ersetzt man b, b_1, b_2, durch c, c_1, c_2, so tritt γ an die Stelle von β, und man erhält auch für γ das Ergebniss, dass $c = - \frac{1}{2}$ oder $+ \frac{1}{2}$, je nachdem d innerhalb oder ausserhalb des Vieleckswinkels $c_1 c_2$ liegt.

Daraus folgen denn die Behauptungen unsres Satzes. Liegt nämlich d innerhalb der Winkel bei β und γ, so ist $b = - \frac{1}{2}$, $c = - \frac{1}{2}$ und

$$a = a_1 + a_2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = a_1 + a_2 - 1.$$

Liegt d ausserhalb der Winkel bei β und γ, so ist $b = + \frac{1}{2}$, $c = + \frac{1}{2}$ und

$$a = a_1 + a_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = a_1 + a_2 + 1.$$

Liegt d innerhalb des Winkels bei β und ausserhalb des bei γ, so ist $b = - \frac{1}{2}$, $c = + \frac{1}{2}$ und

$$a = a_1 + a_2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = a_1 + a_2.$$

Liegt d ausserhalb des Winkels bei β und innerhalb des bei γ, so ist $b = + \frac{1}{2}$, $c = - \frac{1}{2}$ und

$$a = a_1 + a_2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = a_1 + a_2.$$

Zusatz. Schneidet man von einem Vieleck V der $a$ten Art durch eine Diagonale, welche innerhalb der Vieleckswinkel an ihren Endpunkten liegt, ein Vieleck V_1 der $+ 1$ten Art ab, so ist die Art des übrigen Vielecks V_2 $a_2 = a$. Ebenso, wenn die Diagonale ausserhalb der Winkel an ihren Endpunkten liegt, und V_1 von der $- 1$ten Art ist, ist die Art des V_2 $a_2 = a$. Denn im ersten Falle gilt $a = a_1 + a_2 - 1$; für $a_1 = 1$ wird dann $a = a_2$. Im zweiten Falle gilt $a = a_1 + a_2 + 1$, was für $a_1 = - 1$ wieder $a = a_2$ liefert.

12. **Jedes Vieleck, das keine Doppelpunkte hat, ist von der ersten Art**, und zwar von der + 1ten Art, wenn die Vieleckswinkel auf der inneren, und von der — 1ten, wenn sie auf der äusseren Seite des Vielecks liegen.

Ein Vieleck V ohne Doppelpunkte scheidet den Raum seiner Ebene in einen zusammenhängenden endlichen oder inneren und in einen zusammenhängenden unendlichen oder äusseren Theil. Die Vieleckswinkel liegen auf der inneren Seite des Vielecks, wenn sie und der innere Raum auf derselben Seite desselben liegen. Da wir ein Vieleck stets so umlaufen, dass die Vieleckswinkel links liegen, so liegt dann auch der innere Raum links. Beweisen wir, dass in diesem Falle, wenn also die Vieleckswinkel innen liegen, das Vieleck + 1ter Art ist, so ist zugleich bewiesen, dass es, wenn die Vieleckswinkel aussen liegen, — 1ter Art ist, weil durch das Verlegen dieser Winkel auf die andre Seite nach Nr. 6 nur das Zeichen von a umgekehrt wird.

Legt man durch das Vieleck eine Schnittgerade G, die wir lothrecht nennen wollen, so ergibt sich, dass sich auf derselben Stücke befinden, welche abwechselnd im Aussen- und im Innenraume liegen, dass demnach beim Durchlaufen des Vielecks in den in G auf einander folgenden Schnittpunkten diese Gerade abwechselnd nach rechts und nach links überschritten werden muss, und zwar im untersten Punkte, unter dem sich äusserer Raum befindet, stets nach rechts, im obersten stets nach links. Verschiebt man G von links nach rechts über das ganze Vieleck, so verschieben sich die Schnittpunkte gegeneinander, ohne je übereinander wegzuschreiten, weil dies nur für Doppelpunkte möglich ist, deren das Vieleck keine besitzt. Bezeichnen wir die äussersten Eckpunkte links, an denen also die zwei anliegenden Seiten rechts von der durchgehenden Lothlinie liegen, mit l und die äussersten Eckpunkte rechts mit r, so müssen diese Punkte in Paaren von aufeinanderfolgenden l und r vorhanden sein. Sobald die sich bewegende G durch einen Punkt l geht, tritt ein Paar nebeneinanderliegender Schnittpunkte ein, zwischen welche später wieder ein solches Paar trennend eintreten kann. Geht G durch einen Punkt r, so treten ein Paar benachbarter Schnittpunkte aus. Es ist nun klar, dass an dem am weitesten links liegenden Punkte l, sowie an dem am weitesten rechts liegenden Punkte r der Winkel ausspringend oder < 2 R sein muss. Denn an beiden muss der untere Schenkel nach rechts, der obere nach links durchlaufen werden, weil diese Schenkel hier jedenfalls die tiefsten und höchsten Schnittpunkte liefern. Daher liegt der ganze Vieleckswinkel am ersten Punkte rechts, am zweiten links von G, ist also jedesmal < 2 R. Fehlen weitere Punkte l und r, so ist das Vieleck nach Nr. 7 von der + 1ten Art. Sind dagegen noch mehr Punkte l und r vorhanden, so führe man G von dem am weitesten rechts liegenden Punkte l, wo zwei Schnittpunkte eintreten, nach rechts. Diese Schnittpunkte können durch zwischentretende nicht mehr getrennt werden, weil kein Punkt l mehr durchlaufen wird. Man gehe soweit, bis einer von beiden Schnittpunkten zuerst einen Punkt r erreicht hat; der andre Schnittpunkt sei gleichzeitig s. Man verbinde r und s durch die in G liegende Diagonale d, so bilden die Züge lr, ls und die schliessende d ein Vieleck V_1, welches durch eine Diagonale von V abgeschnitten ist. V_1 hat nur einen äussersten Punkt links (l) und einen rechts, der durch die Seite d ersetzt ist. Liegt d innerhalb V, so liegt es auch innerhalb der Vieleckswinkel an seinen Endpunkten, und dann ist der untere Zug ld nach rechts durchlaufen und V_1 ist von der + 1ten Art. Liegt aber d ausserhalb V, so liegt es auch ausserhalb der Vieleckswinkel an seinen Endpunkten, und dann ist der untere Zug ld nach links durchlaufen und V_1 ist von der — 1ten Art. In beiden Fällen ist nach dem Zusatze zu Nr. 11 das übrige Vieleck V_2 von derselben Art wie V. Durch das Abschneiden des V_1 ist zugleich ein Punkt l und ein

Punkt r entfernt, die jedoch nach der Art ihrer Wahl nicht die alleräussersten sein können; es hat daher V_2 zwei solche Punkte weniger als V. Entfernt man so stets ein weiteres Paar dieser Punkte, bis nur noch die alleräussersten übrig sind, so ist stets die Art des übrigbleibenden Vielecks dieselbe geblieben, und da das letzte Vieleck von der $+1$ten Art, so ist es auch das ursprüngliche.

13. Die Anzahl $\varDelta$ der Doppelpunkte eines Vielecks 0ter Art ist wenigstens 1, und die eines Vielecks $+a$ter Art wenigstens $a-1$. Der Ueberschuss von $\varDelta$ über den kleinstmöglichen Werth ist eine gerade Zahl.

Ein Vieleck 0ter Art hat also 1, oder 3, oder 5, . . . Doppelpunkte; ein solches 1ter Art 0, oder 2, oder 4 . . .; eins 2ter Art 1, oder 3, oder 5, . . .; eins $+a$ter Art $a-1$, oder $a+1$, oder $a+3$, . . . Doppelpunkte. Ein Vieleck $-a$ter Art kann durch Umkehrung der Umlaufsrichtung als ein solches $+a$ter Art betrachtet werden, worauf es unsrem Satze unterliegt.

Hat das Vieleck keine Doppelpunkte, so ist es nach der vorhergehenden Nr. 1ter Art, was unsrem Satze entspricht. Hat es aber Doppelpunkte, so zerlege man es durch einen solchen in zwei Vielecke, jedes dieser wieder, bis keines mehr einen Doppelpunkt besitzt, also alle von der ± 1ten Art sind. Sei ihre Anzahl φ, so ist die Anzahl der durch die Zerlegung weggefallenen, oder der zerlegenden Doppelpunkte $\varphi - 1$. Es bleiben nun noch die Doppelpunkte übrig, in welchen sich die einfachen Vielecke schneiden. Ihre Anzahl 2δ muss eine gerade, also δ Null oder eine ganze Zahl sein, da sich offenbar zwei Vielecke erster Art nur in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden können. Daher ist

$$\varDelta = \varphi - 1 + 2\delta. \tag{2}$$

Nach Nr. 10 ist bei der ersten Zerlegung und dann auch bei jeder folgenden a gleich der algebraischen Summe der Zahlen, welche die Art der einzelnen Vielecke ausdrücken. Sind φ_1 und φ_2 die absoluten Zahlen, welche die Anzahl der letzten Vielecke $+1$ter und derjenigen -1ter Art ausdrücken, so ist

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \; a = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{3}$$

und daher mit Beachtung von (2)

$$\varDelta = a - 1 + 2\varphi_2 + 2\delta. \tag{4}$$

Weil φ_2 eine absolute Zahl, die im Allgemeinen auch Null sein kann, so ist $2\varphi_2$ Null oder eine gerade absolute Zahl. Für $\varphi_2 + \delta = 0$ ist $\varDelta = a - 1$, sonst ist $\varDelta$ um eine gerade Zahl grösser als $a - 1$. Bei $a = 0$ kann nicht $\varphi_2 = 0$ sein, weil dann nach den Gleichungen (3) auch $\varphi_1 = 0$ und $\varphi = 0$ sein müsste, was unmöglich. Daher ist $\varphi_2 = 1$ der kleinste zulässige Werth, woraus 1 als kleinster Werth von $\varDelta$ folgt. Damit sind die Behauptungen unsres Satzes bewiesen.

14. Wird ein Vieleck von einer Geraden geschnitten, so ist die Anzahl Σ der Schnittpunkte eine gerade, und die Anzahl derjenigen, in welchen die Gerade von dem Vieleck von der einen zur anderen Seite überschritten wird, ist gleich der Anzahl derer mit entgegengesetzter Ueberschreitung. Beim Durchlaufen des Vielecks folgt stets einem Schnittpunkte der einen Art ein solcher der andren Art.

15. Zu einem Vieleck ohne Doppelpunkte kann stets eine Gerade gefunden werden, welche dasselbe in wenigstens zwei Punkten schneidet.

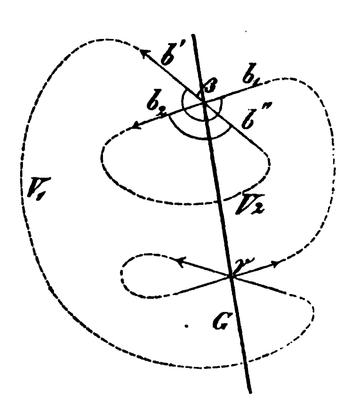
Denn jede Verbindungsgerade zweier nicht auf Einer Seite liegenden Punkte des Vielecks ist eine Gerade, für welche $\Sigma \overline{>} 2$.

16. **Zu einem Vieleck mit einem Doppelpunkte kann stets eine Gerade gefunden werden, welche dasselbe in wenigstens vier Punkten schneidet.**

Denn legt man durch den Doppelpunkt eine Gerade, welche von den beiden sich in ihm schneidenden Seiten beim Durchlaufen des Vielecks in derselben Richtung überschritten wird, so müssen nach Nr. 14 ausser den beiden im Doppelpunkt vereinigten Schnittpunkten noch 2 andre mit entgegengesetzter Richtung des Uebergangs, also im Ganzen 4 solche vorhanden sein. Daher $\Sigma \overline{>} 4$.

17. **Zu einem Vieleck von einer höheren als der zweiten Art kann stets eine Gerade gefunden werden, welche dasselbe in wenigstens sechs Punkten schneidet.**

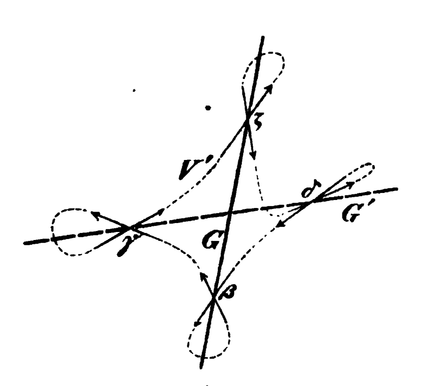
Zerlegt man ein solches Vieleck V, für welches also a wenigstens $= 3$, durch Doppelpunkte in Vielecke $\pm$ 1ter Art, so ist nach Gleichung (3) in Nr. 13 die Anzahl der positiven um wenigstens 3 grösser als die der negativen. Unter den Doppelpunkten gibt es nach Gleichung (2) in Nr. 13 wenigstens 2 zerlegende.



Stossen nun in einem zerlegenden Doppelpunkte β zwei Vielecke V_1, V_2 + 1ter Art zusammen, so hat jede durch ihn gelegte Gerade G wenigstens 4 Punkte mit V gemein. Denn sind b_1 und b'' die erstdurchlaufenen und b_2 und b' die letztdurchlaufenen Stücke der beiden sich in β schneidenden Seiten, so ist jedenfalls der eine Innenwinkel $b''\, b_2$ von V_2 im Innren des andren $b_1\, b'$ von V_1 enthalten. Wenn daher G in Winkel $b''\, b_2$ liegt, so liegt sie auch in $b_1\, b'$, und da bei Vielecken + 1ter Art Vieleckswinkel und innrer Raum nach Nr. 12 auf derselben Seite des Umfangs liegen, so liegt ein Stück von G auch im Innren von V_1 und V_2, muss also jedes ausser in β, in noch einem Punkte, beide zusammen also in 4 Punkten schneiden. Liegt dagegen G im Winkel $b_1\, b''$, so liegt es ausserhalb V_2, dagegen innerhalb V_1, muss dieses also in 2 von β verschiedenen Punkten schneiden, und hat dann mit beiden Vielecken zusammen wieder 4 Punkte gemein. Die Gerade $\beta\gamma$, welche noch durch einen zweiten zerlegenden Doppelpunkt geht, hat dann jedenfalls 6 Schnittpunkte mit V; denn γ ist kein Schnittpunkt von V_1 und V_2; es liegt daher nur auf einem oder auf keinem von beiden. Im erstren Falle kommt noch 1, im letztren Falle kommen noch 2 Schnittpunkte zu den früheren hinzu. Da aber auch im erstren Falle Σ gerade sein muss, so ist $\Sigma \overline{>} 6$.

Stossen dagegen keine zwei Vielecke + 1ter Art in einem zerlegenden Doppelpunkte zusammen, so muss es ein Vieleck V' $\pm$ 1ten Art geben, auf welchem 3 solche Doppelpunkte liegen. Denn lägen auf jedem höchstens 2, und man ginge von einem solchen Vieleck zu einem derjenigen beiden über, welche von ihm durch einen Doppelpunkt getrennt sind, von diesem zu demjenigen, welches von ihm durch seinen zweiten Doppelpunkt getrennt ist, u. s. w., und ebenso nach der andren Seite, so müssten, da keine zwei Vielecke +1ter Art aufeinander folgen sollen, zwischen den φ' positiven wenigstens $\varphi' - 1$ negative Vielecke erster Art liegen, und das ganze Vieleck könnte höchstens + 1ter Art sein. Da aber $a > 2$ sein soll,

so kann diese Voraussetzung nicht eintreffen und es muss ein Vieleck $V' \pm 1$ter Art mit wenigstens 3 Doppelpunkten geben. Da ferner wenigstens ein negatives Vieleck vorhanden sein muss, so ist die Anzahl der Vielecke ± 1ter Art wenigstens gleich 5 (Gleichungen (3) in Nr. 13, worin $\varphi_2 \gtreqless 1$, $a > 2$, also $\varphi > 4$) und die Anzahl der zerlegenden Doppelpunkte wenigstens gleich 4 (Gleichung (2) in Nr. 13). Verbindet man einen vierten solchen ζ mit den dreien β, γ, δ auf V' durch Gerade, so muss jedenfalls eine derselben V' schneiden, weil man von einem Punkte höchstens zwei Gerade nach Punkten eines Vielecks ziehen kann, die dasselbe nicht schneiden. Diese Gerade G sei $\zeta\beta$. Dieselbe kann nun bei β und bei ζ das V' schneiden, oder bei einem (wie G'), oder bei keinem von beiden. In den beiden letzten Fällen muss sie wenigstens 1 oder 2 von β und ζ verschiedene Punkte mit V' gemein haben, und da in β und ζ je 2 Schnittpunkte mit V liegen und die Anzahl der Schnittpunkte eine gerade ist, muss sie V in beiden Fällen in wenigstens 6 Punkten treffen. Wenn dagegen G bei β und ζ das V' schneidet, so muss es auch jedes der anstossenden Vielecke ± 1ter Art schneiden. Denn G hat dann die beiden in β und ζ zusammenstossenden Seiten des V' auf seinen entgegengesetzten Seiten, daher auch deren Verlängerungen, welche die Seiten der anstossenden Vielecke sind; es schneidet also auch diese. Dies geschieht ausser in β und ζ noch in zweien von diesen verschiedenen Punkten. Daher ist auch in diesem letzten Falle unsres Satzes $\Sigma \gtreqless 6$.



18. Unter einer **Wendeseite** eines Vielecks verstehen wir eine solche Seite desselben, an deren einem Ende der Vieleckswinkel kleiner und an deren andrem er grösser als zwei Rechte ist. Eine Wendeseite entspricht einer Wendegeraden der zweiten Figur (Nr. 5). Ein convexes Vieleck kann seinem Begriff nach keine Wendeseiten haben.

Ein Vieleck kann nur eine gerade Anzahl von Wendeseiten haben. Es folgt dies daraus, dass wenn man beim Umlaufen des Vielecks eine Wendeseite mit einem ausspringenden oder einspringenden Vieleckswinkel verlässt, man mit einem gleichartigen Winkel auf die folgende Wendeseite eintreten muss, der letzte Eintritt auf die erste Wendeseite aber nothwendig mit einem Winkel geschieht, ungleichartig von dem, mit welchem man sie verliess.

19. Wir wollen nun noch die obere Grenze der Anzahl Σ der Schnittpunkte einer Geraden G mit einem Vieleck bestimmen. Wir bilden zu dem Ende die zweite Figur zum Vieleck und ziehen darin auch die Entsprechende G' zu G parallel mit derselben.

Dann ergibt sich zunächst, dass wenn in dieser eine Reihe aufeinanderfolgender Geraden auf derselben Seite von G' liegen, der Zug der entsprechenden Seiten in der ersten Figur G nur in Einem Punkte schneiden kann, weil, wenn man den Zug durchläuft und eine zu G Parallele mitführt, diese sich stets in demselben Sinne bewegt, also nicht mehr als einmal mit G zusammenfallen kann; nur hiermit gleichzeitig kann aber der Zug die Schnittlinie G treffen. Dagegen zeigt in der zweiten Figur ein Uebergang der Geraden über G' die Möglichkeit eines Schnittes der den übergegangenen Geraden entsprechenden Seiten mit G an. Denn in ihnen findet gegen letztere ein Zurückschreiten statt.

Es ergibt sich also, dass ein Schnitt so oft möglich ist, als in der zweiten Figur die sich drehende Gerade die G' überschreitet. Wenn man daher zu einem Vielecke (Fig. 3) die zweite Figur (Fig. 4) bildet und darin jeden durchlaufenen Winkel mit einem Bogen anstreicht, so ist die naturgemäss immer gerade Anzahl der Schnittpunkte der G' mit dem Bogen gleich der höchstens möglichen Anzahl der Schnittpunkte der G mit dem Vieleck. Für G' und G ist in unserem Falle $\Sigma \overline{\gtrless} 8$, für g und g' $\Sigma \overline{\gtrless} 6$. Die Grenzen der Richtungen, welche $\Sigma \overline{\gtrless} 8$ und $\Sigma \overline{\gtrless} 6$ liefern, ergeben sich bestimmt in den Linien 1' und 6' oder 1 und 6. Es ist noch zu bemerken, dass, wenn die zweite Figur gegeben ist, man der zugehörigen ersten durch gehörige Länge der Seiten immer die Eigenschaft geben kann, dass sie eine Gerade so oft wirklich schneidet, als die Entsprechende in der zweiten Figur von den Bogen geschnitten wird, dass sie also z. B. eine mit G' Parallele in 8, oder eine mit g' Parallele in 6 Punkten wirklich schneidet.

20. Um die Kennzeichen für die Zahl Σ an dem Vieleck selbst festzustellen, bemerken wir, dass zunächst ebensooft ein neuer Schnittpunkt mit irgend einer Geraden möglich ist, als in der zweiten Figur eine Umkehr in der Drehung stattfindet, d. i. so oft, als die Anzahl der Wendegeraden und die damit gleiche Anzahl ω der Wendeseiten in der ersten Figur anzeigt. Wenn ferner auf einem Zuge des Vielecks zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wendeseiten die Drehung von einer zur anderen mehr als $\frac{1}{2}$ beträgt, so ist die Drehung der entsprechenden Geraden in der zweiten Figur auch grösser als $\frac{1}{2}$, und dann ist ausser dem durch die Umkehr der Drehung möglich gemachten Schnitte mit einer Geraden noch ein zweiter möglich und so für jede folgende halbe Drehung. Wir können daher, unter Berücksichtigung, dass Σ eine gerade Zahl sein muss, sagen:

Bei einem Vieleck ist die Anzahl Σ seiner Schnittpunkte mit einer Geraden höchstens gleich derjenigen geraden Zahl, welche gleich oder um die Einheit kleiner ist, als die Anzahl ω der Wendeseiten vermehrt um die Summe η der ganzen Zahlen, welche angeben, wie oft eine halbe Drehung auf den Zügen durchlaufen wird, welche durch je zwei aufeinanderfolgende Wendeseiten abgeschlossen sind. Oder es ist

$$\Sigma \overline{\gtrless} \omega + \eta, \text{ oder } \Sigma \overline{\gtrless} \omega + \eta - 1,$$

je nachdem η eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist. — Ist keine Wendeseite vorhanden, so wird der einzige vorhandene Zug durch eine beliebige Seite als Anfang und Ende abgeschlossen. — Natürlich kann Σ nicht grösser als die Anzahl der Seiten des Vielecks sein.

Es leuchtet ein, dass aus der zweiten Figur zu einem Vieleck die obere Grenze von Σ weiter herunter gesetzt entnommen werden kann, als aus der ersten, zumal wenn die Richtung der Schnittgeraden gegeben ist.

Zusatz. Ein convexes Vieleck der $a$ten Art wird von einer Geraden in höchstens $2a$ Punkten geschnitten. Denn es ist für es $\omega = 0$ und $\eta = 2a$.

21. Es ergibt sich jetzt sehr leicht die in Nr. 9 behauptete Uebereinstimmung der dort gegebenen Begriffe von convex.

Ein Vieleck, welches von einer Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden kann, liegt auch auf nur einer Seite jeder seiner verlängerten Seiten. Denn läge das Vieleck auf zwei Seiten einer seiner Seiten, so könnte letztere eine Wendeseite sein oder nicht. In erstrem Falle kann man stets eine Gerade durch sie ziehen, welche auch die beiden anstossenden

Seiten trifft, für welche also $\Sigma > 2$; im erstren Falle schneidet die verlängerte Seite das Vieleck noch in wenigstens 2 Punkten, also eine Parallele mit ihr auf der Seite der anstossenden Seiten in 4 Punkten. Umgekehrt, liegt ein Vieleck nur auf einer Seite jeder seiner Seiten, so kann es von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden. Denn würde es in mehr als zweien geschnitten, so läge es auf beiden Seiten der durch einen mittleren Schnittpunkt gehenden Seite. — Endlich ein Vieleck, welches von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird, ist in dem von uns angenommenen Sinne convex und von erster Art. Denn wäre es nicht convex, so hätte es eine Wendeseite, und wäre es nicht erster Art, so hätte es einen Doppelpunkt, und würde beidesmal in mehr als zwei Punkten geschnitten werden können. Umgekehrt kann ein convexes Vieleck der ersten Art nach dem letzten Zusatz von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden.

22. Diese Sätze über die Anzahl der Doppelpunkte und der Schnittpunkte mit einer Geraden sind von der Anzahl der Seiten unabhängig; sie gelten daher auch für die Grenze von unendlich vielen Seiten oder für krumme Linien, da bei dem Erreichen der Grenze keine Unstetigkeit eintritt. Die Wendeseite wird dann zur Wendetangente, d. i. zur Tangente in einem Wendepunkte.

23. Als Flächeninhalt eines Vielecks wird gewöhnlich der endliche oder kleinere der beiden Räume bezeichnet, in welche das Vieleck seine unbegrenzte Ebene theilt. Dabei entsteht kein Zweifel, so lange keine Doppelpunkte vorhanden sind. Sind aber deren vorhanden, so ist der Flächeninhalt nach obigem Begriffe zweifelhaft. Das Gesetz der Stetigkeit fordert, dass dann positive und negative Flächenräume unterschieden werden. Denn setzt man bei einem Vielecke, dessen Seiten sich nicht schneiden, auf eine Seite ein nach aussen liegendes Dreieck auf, um welches die Fläche des Vielecks vermehrt wird, nähert dann den neuen Eckpunkt der früheren Seite, so nimmt der Zuwachs der Fläche ab und wird beim Durchgang durch die Seite Null und beim Eindringen ins Innere negativ. Die dann stattfindende Abnahme der Fläche vergrössert sich stetig um das wachsende, nach innen gekehrte Dreieck. Damit diese Stetigkeit bei einem zweiten Durchgang des Punktes durch das Vieleck nicht unterbrochen wird, muss nicht nur der bis zu demselben reichende Theil des Dreiecks abgezählt, sondern auch noch der ausserhalb befindliche mit negativem Zeichen zugefügt werden. Der ganze Inhalt kann dann auch negativ werden.

Dasselbe Ergebniss wird in einfacherer und allgemeiner Weise erhalten, wenn man den Inhalt eines Vielecks für die algebraische Summe der Flächen erklärt, welche eine Gerade beschreibt, deren eines Ende sich stets in einem festen Punkte der Vielecksebene befindet, und deren anderes Ende das Vieleck einmal beschreibt, wobei die durch Drehung der Geraden in einem Sinne beschriebenen Flächentheile positiv, die durch Drehung in entgegengesetztem Sinne beschriebenen negativ sind. Man sieht, dass nach der Wahl der positiven Drehrichtung der Inhalt desselben Vielecks positiv und negativ werden kann. Wählt man bei einem convexen Vielecke der ersten Art den willkürlichen Punkt im Inneren, so bekommen alle Flächentheile dasselbe Zeichen, sonst entgegengesetzte. Wählt man den Punkt im Unendlichen, so treten auch negative Flächentheile auf. Man kann dann alle Flächentheile offenbar ohne Aendrung des Ergebnisses auch von einer die Richtung nach jenem Punkte schneidenden Geraden an zählen, und wenn man dieselbe senkrecht schneiden lässt, erhält man das bei rechtwinkligen Coordinaten gebräuchliche Verfahren der Flächenbestimmung. Die sonst dreieckigen Flächentheile werden dann Paralleltrapeze. Bei einem Vielecke $a$ter Art kommen

immer Flächentheile vor, welche bei dieser Begriffsbestimmung des Flächeninhalts zwei- oder mehrfach zu demselben gezählt werden müssen; aber gerade die dadurch alsbald herbeizuführenden mit anderen Ergebnissen übereinstimmenden Folgerungen sind ein weiterer Grund, welcher uns zu dieser Begriffsangabe bestimmt.

24. Ein **regelmässiges Vieleck** ist ein solches, dessen Seiten untereinander und dessen Winkel untereinander gleich sind. Man betrachtet gewöhnlich nur die erste Art, es gibt aber auch solche höherer, jedoch keine 0ter Art. Denn die regelmässigen Vielecke sind jedenfalls convex, da alle Winkel gleich, also alle kleiner oder alle grösser als 2 R sind. Wir nennen die kleineren die Vieleckswinkel. Die Vielecke 0ter Art sind aber nicht convex.

25. **Um jedes regelmässige Vieleck und in dasselbe lässt sich ein Kreis beschreiben.**

Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Art des Vielecks. Der Mittelpunkt beider Kreise ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt O aller Geraden, welche die Seiten des Vielecks senkrecht halbiren. Denn errichtet man in den Mitten zweier aufeinander folgender Seiten Senkrechte und wiederholt dieselbe Construction an zwei anderen aufeinanderfolgenden Seiten, so kann man wegen der Gleichheit der 2 Winkel und aller 4 Seiten die zweite Figur in 2 Lagen mit der ersten zur Deckung bringen, woraus folgt, dass die durch den Schnittpunkt zweier aufeinanderfolgenden Senkrechten auf diesen abgeschnittenen Stücke alle gleich sind. Die Senkrechten auf der ersten und dritten Seite schneiden daher gleiche Stücke derjenigen auf der zweiten ab, oder alle drei schneiden sich in demselben Punkte O, durch welchen dann auch die Senkrechten auf der vierten und auf allen folgenden Seiten gehen. Dieser Punkt ist gleich weit von allen Ecken und von allen Seiten entfernt, er ist daher der Mittelpunkt des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises.

Man erhält demnach die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks erster Art, wenn man den Umfang eines Kreises in n gleiche Theile theilt.

Um die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks $a$ter Art zu erhalten, muss man den $a$fachen Umfang in n gleiche Theile theilen; jeder Theil wird dann $a$mal $\frac{1}{n}$ des einfachen Umfangs. Es fallen also für denselben umschriebenen Kreis und denselben Anfangspunkt alle Eckpunkte aller Arten von n-Ecken in die der ersten Art herein, und man erhält das n-Eck $a$ter Art, indem man die n Theilungspunkte des Kreises von a zu a verbindet.

26. **Es gibt so viel Arten eines regelmässigen n-Ecks, als es Primzahlen zu n von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ gibt.**

Ist a kleiner als n und eine Primzahl zu n, ist der Kreisumfang in n gleiche Theile getheilt, und geht man von Theilungspunkt zu Theilungspunkt jedesmal um a Theile weiter, so kommt man erst dann zum Ausgangspunkte zurück, wenn man alle n Punkte durchschritten und $a$mal den Umfang durchlaufen hat. Denn wenn man zum erstenmal zum Ausgangspunkte zurückkehrt, so muss die Anzahl der durchlaufenen Theile ($= \frac{1}{n}$ des Umfangs) das kleinste Vielfache von a und von n, d. h. $a \,.\, n$ sein. Daher muss man n verschiedene oder alle n Theilungspunkte und $a$mal n Theile oder $a$mal den Umfang zurückgelegt haben.

Sind dagegen a und n keine Primzahlen gegeneinander, so sei Θ ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler, und es sei $a = a' . \Theta$, $n = n' . \Theta$. Dann ist das kleinste gemeinschaft-

liche Vielfache $= a' . n' . \Theta$, so dass man bei der Rückkehr zum Ausgangspunkte $\frac{a' . n' . \Theta}{a} = n'$ mal eine Seite und $\frac{a' . n' . \Theta}{n} = a'$ mal den Umfang zurückgelegt hat. Das regelmässige Vieleck hat daher nur $n' = \frac{n}{\Theta}$ Seiten und seine Art ist durch $a' = \frac{a}{\Theta}$ ausgedrückt. Es werden also von den n Theilungspunkten nur diejenigen von Θ zu Θ durchlaufen. Es muss daher, damit ein n-Eck entsteht, a Primzahl zu n sein.

Da eine Seite des Vielecks zugleich eine Sehne zu a und zu $n—a$ Theilen des Kreises ist, so liefert $n—a$, an die Stelle von a gesetzt, kein neues Vieleck. Oder, jeder Werth von a, der grösser als $\frac{n}{2}$ ist, liefert dasselbe Vieleck, welches schon durch den Werth von a, der jenen zu n ergänzt, geliefert wurde. Da ferner $\frac{n}{2}$ keine Primzahl zu n sein kann, so gibt es so viele Arten von n-Ecken, als es Primzahlen zu n von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ gibt.

27. Wenn eine Zahl n die einfachen Factoren α, β, γ... hat, so dass $n = \alpha^p \beta^q \gamma^r ...$, wo p, q, r ganze positive Zahlen, so ist bekanntlich die Anzahl der Primzahlen zu n, welche kleiner sind als n, ausgedrückt durch $n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)...$ Da nun zu jeder Primzahl eine zweite gehört, welche die Ergänzung der ersten zu n ist, und da beide in unserem Falle dasselbe Vieleck liefern, so ist die Anzahl N der Arten eines regelmässigen n-Ecks nur die Hälfte der obigen Zahl, oder es ist

$$N = \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)...$$

Wenn n eine Primzahl, ist $\alpha = n$ und $N = \frac{n-1}{2}$.

Man findet nach diesen Formeln, dass es von dem Dreieck nur eine Art gibt, von dem Viereck nur 1, von dem Fünfeck 2 (Fig. 5, 6), von dem Sechseck 1, von dem Siebeneck 3 (Fig. 7, 8, 9), von dem Achteck 2 (Fig. 10, 11), von dem Neuneck 3, von dem Zehneck 2, von dem Elfeck 5, von dem Zwölfeck 2 Arten.

28. Die Summe W der Vieleckswinkel wird um so kleiner, je grösser a. Für die drei einzigen regelmässigen Vielecke, welche nur in Einer Art vorkommen, nämlich das Dreieck, Viereck und Sechseck, ist der Reihe nach $W = 2$ R, $W = 4$ R, $W = 8$ R. Will man für die übrigen den kleinsten Werth von W finden, so muss man in die Formel (1) Nr. 8

$$W = (n-2a) . 2 \text{ R}$$

die grösstmöglichen Werthe von a einführen. Für n ungerade ist diess $a = \frac{n-1}{2}$, dann wird $W = 2$ R. Für n doppelt gerade, oder theilbar durch 4, ist die grösste Primzahl, welche kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, $a = \frac{n}{2} - 1$; dafür wird $W = 4$ R. Für n einfach gerade ist für $a = \frac{n}{2} - 2$, $W = 8$ R. Es sind diess dieselben Werthe, wie bei den drei Vielecken einziger Art.

Für unregelmässige Vielecke gilt nur die Bedingung der Nr. 8 $a < \frac{n}{2}$, woraus für n ungerade: $W = 2$ R, für n gerade: $n = 4$ R als kleinster Werth der Winkelsumme folgt.

29. Man bemerkt, dass die regelmässigen Vielecke höherer Art die Gestalt von Sternen haben. Sie fallen in den Begriff der regelmässigen Vielecke ebenso herein, wie die erster Art. Die Eigenthümlichkeit, dass sich die nicht aneinanderstossenden Seiten ohne Verlängerung schneiden, während sich die der ersten Art nur durch Verlängerung treffen, widerspricht nicht dem Begriffe der Regelmässigkeit, wie er in Nr. 24, übereinstimmend mit dem allgemeinen Gebrauche, aufgestellt wurde. Es wird nur gewöhnlich noch stillschweigend die Anforderung der Convexität im engeren Sinne gestellt. Diess geschieht hier nicht; die Anforderung der Convexität im erweiterten Sinne wird von selbst erfüllt. Jedenfalls bilden die Schnittpunkte nicht zusammenstossender Seiten ebensowenig bei den Vielecken höherer Art wie bei denen erster Art Eckpunkte, an denen Vieleckswinkel liegen.

Noch bestimmter spricht hier die Analysis, in welcher die Vielecke verschiedener Art ganz gleich berechtigt erscheinen. So erhält man, wenn r den Halbmesser des umschriebenen Kreises bedeutet, durch die Formel

$$r\sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}}$$

die Seite des regelmässigen Fünfecks, sowohl erster als zweiter Art. Ebenso liefert

$$\frac{r}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

die Seiten der beiden einzig möglichen Arten des regelmässigen Zehnecks (1. und 3. Art).

30. Der Flächeninhalt eines regelmässigen Vielecks höherer Art ist durch den vorhin festgestellten allgemeinen Begriff bestimmt. Wählt man als willkürlichen Punkt den Mittelpunkt, so ist die Fläche des n-Ecks gleich der Summe der n Dreiecke, welche die Seiten zu Grundlinien und den Mittelpunkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Man bemerkt, dass demnach bei einem regelmässigen n-Eck $a$ter Art der Kern, welcher ein regelmässiges n-Eck erster Art ist, $a$mal, andere Theile weniger oft und die Flächentheile zunächst bei den Ecken nur einmal zur Fläche gezählt werden müssen.

II. Ueber Vielflache.

31. Ein vollständiges körperliches Vieleck der $n$ten Ordnung oder ein vollständiges körperliches n-Eck besteht aus n Punkten, die nicht in Einer Ebene liegen, und aus der Gesammtheit der Geraden und Ebenen, welche dieselben durch ihre Verbindung bestimmen.

Ein vollständiges Vielflach oder Polyëder der $n$ten Ordnung oder ein vollständiges n-Flach besteht aus n Ebenen, die nicht durch Einen Punkt gehen, und aus der Gesammtheit der Geraden und Punkte, welche dieselben durch ihre Durchschnitte bestimmen.

Ein einfaches körperliches Vieleck ist dasselbe Gebilde wie ein einfaches Vielflach. Der Unterschied in der Benennung führt auch eine andere Ordnung nach sich, indem die Anzahl der Ecken und Flächen im Allgemeinen verschieden ist. So ist das Ikosaëder ein körperliches 12Eck und ein 20Flach. Wir folgen der gebräuchlichen Benennung nach der Anzahl der Flächen und sagen:

Ein einfaches Vielflach oder Polyëder der $n$ten Ordnung oder ein einfaches n-Flach ist die Gesammtheit von n einfachen ebenen Vielecken, von denen jedes jede seiner Seiten mit einer Seite Eines andren Vielecks gemein hat. Daraus folgt von selbst, dass die Gesammtheit der Vielecke eine von allen Seiten geschlossene Oberfläche bildet.

32. Die das Vielflach bildenden Vielecke heissen Seitenflächen oder Seiten. Die gemeinschaftlichen Seiten zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen heissen Kanten. Jede Kante gehört zweien und nicht mehr als zweien Seitenflächen an. Die Punkte, in welchen die Enden mehrerer Kanten zusammenfallen, heissen Ecken. An jedem Ecke bilden die an ihm zusammenstossenden Seitenflächen ein körperliches Eck; es müssen von jedem Ecke wenigstens drei Seitenflächen und drei Kanten ausgehen. Die Kantenwinkel sind die Innenwinkel der Seitenflächen.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Begriff der Flächenwinkel. Die an jeder Kante zusammenstossenden beiden Flächen bilden zwei Flächenwinkel, welche zusammen 4 Rechte betragen. Bildet man das Netz des Vielflachs, indem man dasselbe nach einer Reihe von Kanten öffnet und um die andern Kanten alle Seitenflächen der Reihe nach in die Ebene einer solchen umklappt, unterscheidet man dann die beiden Seiten dieser Ebene, etwa durch weiss und schwarz, und bildet dann wieder durch Zurückbiegen das Vielflach, so sind die Flächenwinkel desselben diejenigen, welche von derselben Seite jener Ebene, entweder der weissen oder der schwarzen, gebildet werden.

33. Man unterscheidet Vielflache verschiedener Art. Ein Vielflach ist von der Aten Art, wenn man in seinem Innren einen derartigen Punkt angeben kann, dass jede durch ihn gelegte Ebene das Vielflach in einem Vieleck Ater Art schneidet. Die Projection des

Vielflachs auf eine um jenen Punkt als Mittelpunkt gelegte Kugel, von diesem Punkte aus, bedeckt dann die Kugel an jeder Stelle mindestens Amal. Doch ist die Afache Kugelbedeckung, ebensowenig wie bei einem Vieleck die $a$fache Kreisbedeckung, für sich ein Beweis, dass das Vielflach von der Aten Art ist. Es kann dasselbe Ergebniss bei einem Vielflach niederer Art durch Flächenwinkel, die theils kleiner theils grösser als 2 Rechte sind, bewirkt sein. Nur bei einem Vielflach mit Winkeln, die alle kleiner oder alle grösser als 2 R sind, ist bei Afacher Kugeldeckung nothwendig auch die Art durch A ausgedrückt.

34. Der Begriff der Convexität muss für die Vielflache ebenso wie für die Vielecke erweitert werden. Gewöhnlich nennt man ein Vielflach convex, wenn es von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, oder wenn es nur auf Einer Seite jeder verlängerten Seitenfläche liegt. Beide Bedingungen fallen wieder zusammen. Zunächst wenn ein Vielflach von einer Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden kann, so liegt es nur auf Einer Seite jeder Seitenfläche. Denn läge es auf beiden Seiten einer solchen, so würde durch eine Schnittebene ein Vieleck zu liefern sein, welches auf beiden Seiten von einer Seitenlinie läge, und dann müsste nach Nr. 21 diess Vieleck und damit das Vielflach von einer Geraden in mehr als 2 Punkten geschnitten werden können. Und umgekehrt, wenn ein Vielflach nur auf Einer Seite jeder Seitenfläche liegt, so wird es von jeder durch eine Schnittgerade gelegten Ebene in einem Vieleck geschnitten, das nur auf Einer Seite jeder Seitenlinie liegt, und dann kann nach Nr. 21 dieses und damit das Vielflach von der Geraden nur in 2 Punkten getroffen werden.

Abweichend hiervon wollen wir ein Vielflach convex nennen, wenn alle seine Flächenwinkel kleiner als 2 Rechte, oder wenn alle grösser als 2 Rechte sind; im letztren Falle sind alle ihre Ergänzungswinkel zu 4 R kleiner als 2 R, und diese wollen wir dann die Flächenwinkel nennen. Nicht convex ist ein Vielflach, wenn es Flächenwinkel besitzt, welche kleiner, und andre, welche grösser als 2 R sind. Bei gewöhnlichen Vielflachen, d. i. bei denen erster Art, liefert dieser Begriff dieselben Unterscheidungen, wie die vorher angeführten. Ein solches Vielflach kann nämlich von einer Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden. Denn eine durch die Schnittgerade gelegte Ebene schneidet das Vielflach in einem Vieleck erster Art, dessen Winkel alle kleiner als 2 R, weil sie die Schnitte mit Flächenwinkeln sind, die ebenfalls kleiner als 2 R. Ein solches Vieleck und damit das Vielflach kann aber nach Nr. 21 von der Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden. Und umgekehrt, wenn das Vielflach von jeder Geraden nur in 2 Punkten geschnitten wird, so müssen alle durch die Schnittgerade gelegte Ebenen nur Vielecke erster Art liefern, deren Winkel alle kleiner als 2 R sind; und dann muss auch das Vielflach erster Art sein und nur Flächenwinkel kleiner als 2 R haben. — Auf die Vielflache höherer Art kann aber nur der letztere Begriff von convex übertragen werden, indem dieselben, entsprechend den ebenen Vielecken, nach den beiden ersteren Begriffen keine Unterscheidung zuliessen, sondern alle nicht convex wären.

35. Um die Anzahl der möglichen Schnittpunkte einer Geraden mit einem Vielflach zu bestimmen, wenn eine Ebene gegeben ist, in welcher die Gerade liegen soll, bestimme man den möglichst grossen Werth jener Zahl für das Schnittvieleck der Ebene mit dem Vielflach. Soll die Gerade durch einen im Endlichen oder Unendlichen gegebenen Punkt gehen, so projicire man von ihm aus das Vielflach auf eine Ebene; dann ist die grösste Zahl, welche das Vielfache der Projectionen von Seitenflächen an irgend einer

Stelle angibt, die gesuchte Zahl. An die Stelle der Ebene kann auch eine Kugel treten, wobei die Summe des Vielfachen auf gegenüberliegenden Stellen genommen werden muss.

36. Der körperliche Inhalt eines convexen Vielflachs erster Art ist der endliche oder kleinere der beiden durch das Vielflach geschiedenen Räume. Ein innrer Punkt ist ein solcher, von welchem aus man nicht in den unendlich fernen Raum gelangen kann, ohne das Vielflach geschnitten zu haben. Den körperlichen Inhalt eines Vielflachs im Allgemeinen kann man wieder ganz entsprechend wie den eines Vielecks feststellen. Man schneidet das Vielflach durch Ebenen, welche alle durch eine beliebige Gerade gehen, und von denen jedenfalls durch jeden Eckpunkt eine gelegt sein soll. Die aufeinanderfolgenden Schnittvielecke haben entsprechende, d. h. auf derselben Seitenfläche des Vielflachs liegende Seiten, wovon jedoch die eine zu einem Punkte geworden sein kann. Durch die Ebene zweier solcher Vielecke und den zwischen ihnen liegenden zum Vielflach gehörigen Flächenzug ist eine keilförmige körperliche Schicht abgegrenzt. Den körperlichen Inhalt derselben erhält man, indem man ein Dreieck legt, dessen eines Eck in einem beliebigen Punkte jener beliebigen Geraden und dessen beide andre Ecken auf entsprechenden Seiten der Vielecke liegen. Indem man dieses Dreieck sich so drehen lässt, dass sein erster Punkt seine Stelle nicht ändert und jeder der beiden andren Punkte eines der Vielecke beschreibt, beschreibt es den körperlichen Inhalt einer Schicht. Die Raumtheile sind positiv oder negativ, je nachdem sich das Dreieck nach der einen, oder nach der entgegengesetzten Richtung dreht. Die Summe der körperlichen Inhalte der Schichten ist der körperliche Inhalt des Vielflachs.

37. Ein regelmässiges Vielflach ist ein solches, dessen Seiten congruente regelmässige Vielecke und dessen Flächenwinkel gleich sind.

Daraus folgt die Congruenz aller Ecken und die Eigenschaft, dass wenn man zwei regelmässige Vielflache von gleichen Seiten und Flächenwinkeln mit einem Paare von Ecken zum Decken bringt, sie sich mit allen Stücken decken.

Alle regelmässigen Vielflache sind convex, da alle Flächenwinkel gleich, also alle kleiner, oder alle grösser als 2 Rechte sind. Wir nennen in Zukunft nur die kleineren die Flächenwinkel.

38. Um jedes regelmässige Vielflach und in dasselbe lässt sich eine Kugel beschreiben. Die Mittelpunkte beider fallen in einen Punkt zusammen, der auch der Mittelpunkt des Vielflachs heisst. Dieser Satz ist unabhängig von der Art des Vielflachs, d. i. von der Anzahl, wie oft dasselbe den inneren Raum umhüllt. Jener Mittelpunkt ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Senkrechten, welche man in den Mitten aller Seiten errichtet. Denn errichtet man in den Mitten zweier zusammenstossender Seiten Senkrechte, so schneiden sich dieselben, weil sie in der Ebene liegen, welche die Grenzkante senkrecht halbirt. Jedes solche Paar von Seiten kann mit jedem anderen Paare auf zwei Arten zur Deckung gebracht werden, und da dann auch die Senkrechten und die auf ihnen gebildeten Abschnitte zur Deckung kommen, so sind alle vier Abschnitte unter einander gleich. Die Senkrechte einer Seite wird daher von denen aller anstossenden Seiten in demselben Punkte getroffen; durch denselben Punkt gehen die Senkrechten der daran stossenden Seiten und so der Reihe nach aller folgenden, so dass sie alle durch Einen Punkt gehen. Derselbe ist gleichweit von allen Ecken und von allen Seiten entfernt, ist also der Mittelpunkt der umschriebenen und der eingeschriebenen Kugel.

39. **Die zweiten Endpunkte aller von einem Eck eines regelmässigen Vielflachs ausgehenden Kanten bilden ein regelmässiges Vieleck.** Denn da die Kanten gleiche Sehnen der umschriebenen Kugel sind, so liegen die zweiten Endpunkte auf einem kleinen Kreise, zu welchem der gemeinschaftliche erste Endpunkt der Pol ist. Verbindet man die zweiten Endpunkte durch Gerade auf den Seitenflächen des Ecks, so sind diese als entsprechende Seiten congruenter Dreiecke gleich. Sie bilden daher ein in jenen kleinen Kreis eingeschriebenes regelmässiges Vieleck.

40. Um ein **regelmässiges Vielflach zu bilden**, dessen Seiten n-Ecke und dessen Ecken νflächig sein sollen, stelle man zuerst ein **Eck** desselben her. Zu dem Ende bilde man, dem vorhergehenden Satze gemäss, ein regelmässiges ν-Eck, dessen Seite gleich der Diagonale des eine Seitenfläche bildenden regelmässigen n-Ecks über 2 Seiten ist, und setze darüber eine gerade Pyramide, deren Endkanten gleich den Seiten des n-Ecks sind. An der Spitze der Pyramide ist dann das verlangte Eck gebildet, dessen Seitenflächen man zu den n-Ecken vervollständigen kann. Von den gewöhnlichen regelmässigen Vielflachen wird stillschweigend — nicht durch die Begriffsangabe — verlangt, dass sie convex in dem Sinne sind, dass sie von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden können; daher darf das n-Eck und das ν-Eck nur von der ersten Art sein, weil jeder dieser Umstände für sich mehr als 2 Schnittpunkte möglich macht. In diesem Falle muss die Summe der Kantenwinkel am Ecke $< 4R$ sein, woraus bekanntlich folgt, dass für $n = 3$ nur sein kann: $\nu = 3$, $\nu = 4$, $\nu = 5$, für $n = 4$: $\nu = 3$, für $n = 5$: $\nu = 3$. Dadurch sind 5 Arten von möglichen Ecken bestimmt. Da wir aber diese Anforderung nicht stellen, sondern allein den aufgestellten Begriff eines regelmässigen Vielflachs erfüllen wollen, wobei übrigens das Gebilde von selbst convex in dem erweiterten Sinne wird, so ist eine unbegrenzte Anzahl Arten von Ecken möglich, welche einem regelmässigen Vielflach angehören könnten. Es können nämlich beide vorkommende regelmässige Vielecke von höherer Art sein, nämlich das n-Eck von der $a$ten und das ν-Eck von der αten Art. Wir wollen dabei unter einem **körperlichen Ecke von der αten Art** ein solches verstehen, welches von einer Ebene in einem Vieleck der αten Art geschnitten wird. Unser Eck des Vielflachs ist dann von derselben Art α, wie das ν-Eck. Die einzige Beschränkung, welche bei der Bildung der Ecken besteht, ist die, dass der Halbmesser des dem ν-Eck umschriebenen Kreises kleiner als die Seite des n-Ecks sein muss.

Um zu dem gebildeten Ecke das ganze **Vielflach** herzustellen, muss man an den Endpunkten seiner Kanten gleiche Ecken bilden, welche immer die zwei in der Kante zusammentreffenden Seitenflächen mit dem ersten Ecke gemein haben, und muss so fortfahren, bis man ein geschlossenes Vielflach erhält. Diess ist bei den oben erwähnten 5 Arten von Ecken möglich, wie man durch Verfolgen von Eck zu Eck bis zum Schlusse nachweist. Man findet dann, dass

aus $n = 3$, $\nu = 3$, das Vierflach oder Tetraëder,
aus $n = 3$, $\nu = 4$, das Achtflach oder Oktaëder,
aus $n = 3$, $\nu = 5$, das Zwanzigflach oder Ikosaëder,
aus $n = 4$, $\nu = 3$, das Sechsflach oder Hexaëder, oder der Würfel,
aus $n = 5$, $\nu = 3$, das Zwölfflach oder Dodekaëder

gebildet wird.

Von den unzähligen anderen Ecken, welche selbst, oder deren Seitenvielecke höherer Art sind, führen aber nur vier zu einem geschlossenen regelmässigen Vielflach. Um dieses zu beweisen, sind zwei Sätze nöthig, welche zwar fast von selbst einleuchten, die aber doch, um jeden Einwand zu beseitigen, bewiesen werden sollen.

41. **Sind irgend welche Punkte im endlichen Raume einer Ebene gegeben, so kann man immer ein, aber auch nur ein convexes Vieleck der ersten Art finden, dessen Ecken sich unter den gegebenen Punkten befinden, und das die übrigen Punkte in seinem Inneren oder in seinen Seiten einschliesst.**

Man ziehe von jedem Punkte einseitige Strahlen nach allen übrigen Punkten. Diejenigen Punkte, an denen diese Strahlen in einem Winkel, der < 2 Rechte ist, eingeschlossen sind, werden Ecken, die äussersten Strahlen Seiten und jener Winkel ein Winkel des Vielecks. Solche Punkte sind immer möglich. Denn verschiebt man eine Gerade in der Ebene der Punkte, bis auf ihrer einen Seite keine der Punkte mehr liegen, sie aber durch einen derselben geht, was wegen der Endlichkeit der Abstände stets möglich ist, so ist dieser letztere Punkt ein Eck, von dem die 2 bezeichneten Seiten ausgehen. Der andere Punkt auf einer Seite oder, wenn mehrere darauf liegen, der äusserste, ist dann ein weiteres Eck. Die so gebildete Figur ist ein geschlossenes Vieleck, weil von jedem Eck zwei Seiten ausgehen; das Vieleck ist convex, von der ersten Art und schliesst alle Punkte, die keine Ecken sind, in seinem Inneren oder seinen Seiten ein, weil auf der einen Seite jeder Seitenlinie keine der Punkte liegen; es ist nur in Einer Art möglich, weil die Eckpunkte und die beiden von jedem ausgehenden Seiten ganz bestimmt sind.

42. **Sind irgend welche Punkte im endlichen Raume gegeben, so kann man immer ein, aber auch nur ein convexes Vielflach der ersten Art finden, dessen Ecken sich unter den gegebenen Punkten befinden, und das die übrigen Punkte in seinem Inneren oder in seinen Seiten einschliesst.**

Man ziehe von jedem Punkte einseitige Strahlen nach allen übrigen Punkten. Diejenigen Punkte, an denen diese Strahlen auf derselben Seite einer durch den Punkt gelegten Ebene liegen, werden Ecken des Vielflachs. Man erkennt dies dadurch, dass man alle Strahlen oder ihre rückwärts gehenden Verlängerungen durch eine Ebene schneidet. Ist es möglich, die ersteren Punkte von den letzteren durch eine Gerade zu trennen, so liegen die Strahlen auf derselben Seite der durch diese Gerade und den Scheitel des Strahlenbündels gelegten Ebene. Solche Punkte sind immer möglich. Denn verschiebt man eine Ebene, bis auf ihrer einen Seite keine der Punkte mehr liegen und sie durch einen derselben geht, so ist dieser letztere ein solcher. Um die von einem Eck ausgehenden Seitenflächen zu erhalten, schneide man die Strahlen durch eine Ebene, parallel mit derjenigen, von welcher die Strahlen auf einer Seite liegen, lege um und durch die Schnittpunkte ein convexes Vieleck erster Art nach Nr. 41, so sind die Ebenen, welche durch dessen Seiten und den Scheitel des Strahlenbündels gehen, Seitenflächen des Vielflachs. Auf jeder Kante des entstandenen körperlichen Ecks liegen noch einer oder mehrere der gegebenen Punkte; der eine oder der äusserste von den mehreren ist ein weiteres Eck des Vielflachs.

Das so erzeugte Gebilde ist ein geschlossenes Vielflach, weil von jedem Eck ein geschlossenes körperliches Eck ausgeht und auf jeder Kante desselben ein zweites Eck liegt; das Vielflach ist convex, von der ersten Art und schliesst alle Punkte, die keine Ecken sind,

in seinem Inneren oder in seinen Seiten ein, weil auf der einen Seite jeder Seitenfläche keine der Punkte liegen; es ist nur in Einer Art möglich, weil die Eckpunkte und die davon ausgehenden Seiten ganz bestimmt sind.

43. Hülfssatz. Wenn bei einem convexen Vielflach erster Art jedes Eck dieselbe Anzahl von Flächen besitzt, so kann diese Anzahl nicht grösser als 5 sein.

Dieser Satz ist eine längst bekannte Folgerung aus den Euler'schen Sätzen über die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs.

44. Ein regelmässiges Vielflach höherer Art hat dieselben Ecken, wie ein regelmässiges Vielflach erster Art.

Die Ecken des regelmässigen Vielflachs P der höheren Art liegen auf einer Kugel. Legt man nun nach Nr. 42 ein convexes Vielflach p erster Art, welches jene Ecken zu Ecken hat oder sie im Inneren oder auf den Seitenflächen einschliesst, so ergiht sich, dass es hier solche eingeschlossene Punkte nicht geben kann, weil alle Punkte auf derselben Kugel liegen. Die Vielflache P und p haben daher alle Ecken gemein. Es wird nun behauptet, dass p ein regelmässiges Vielflach der ersten Art sei. Bilde ein mit P congruentes Vielflach Q, und dazu das convexe Vielflach q erster Art mit denselben Ecken, so muss, weil die Ecken von P und Q beim Decken zusammenfallen auch q mit p congruent sein. Weil P und Q regelmässige Vielflache, so findet das Decken stets statt, sobald ein Eck des Q auf ein beliebiges Eck des P gelegt und eine Seite des Q mit einer des P zum Decken gebracht wird. Daher sind auch alle Ecken des p mit einem des q und daher untereinander gleich und haben insbesondere auch gleich viele Flächen. Das Decken des Q mit P ist für dieselben beiden Ecken auf wenigstens 3 Arten möglich, da wenigstens 3 Flächen von einem Ecke ausgehen. In jeder Lage decken sich dann p und q. Eine Fläche b des q an jenem Eck kommt dann mit wenigstens 3 unterschiedenen Flächen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ des p zur Deckung. Zwischen diesen Flächen können aber keine mehr an jenem Eck auf p liegen. Denn läge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Flächen b_1, b_2 von jenen gedeckten noch eine Fläche c_1, so müsste sie, wenn b und b_1 sich decken, von einer Fläche c des q gedeckt werden. Bei jeder neuen Lage der Deckung müsste c dann andre Flächen $c_2, c_3 \ldots$ decken, so dass an einem Ecke wenigstens 6 Flächen $b_1, b_2, b_3, \ldots c_1, c_2, c_3 \ldots$ liegen müssten. Dies ist aber nach der vorigen Nr. nicht möglich. Es können also keine Flächen auf p zwischen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ liegen, und p hat daher ebensoviel Flächen an einem Eck als P. In diesen Flächen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ sind alle von dem Eck ausgehende Kanten mit einer solchen Kante des q und daher unter einander gleich; ebenso sind die von diesen gebildeten Kantenwinkel mit einem des q und daher unter einander gleich. Ferner kommen die Flächenwinkel an jenen Kanten des p der Reihe nach mit demselben Flächenwinkel des q zum Decken, sind also ebenfalls unter einander gleich. Dasselbe gilt von dem Ecke des q. Da man aber dasselbe Eck des Q und q mit jedem Eck des P und p zur Deckung bringen kann, so sind alle Kanten des p mit jenen von einem Ecke des q ausgehenden untereinander gleichen gleich und daher ebenfalls untereinander gleich; ebenso sind alle Kantenwinkel des p untereinander und alle Flächenwinkel des p untereinander gleich. Die Seiten des p sind daher gleiche regelmässige Vielecke und das Vielflach erster Art ist ein regelmässiges.

45. **Es gibt nur vier regelmässige Vielflache höherer Art.**

Um dieselben zu finden, lege man gemäss der vorhergehenden Nr. von einem Eck eines gewöhnlichen regelmässigen Vielflachs der Reihe nach alle Gattungen von Geraden jedesmal nach den gleichweit entfernten übrigen Ecken, untersuche, ob durch zwei gleiche Gerade eine Ebene geht, in welcher die darin liegenden Ecken des Vielflachs zugleich die Ecken eines regelmässigen Vielecks bilden, von denen die zwei Geraden Seiten sind. Kann man durch jede Gerade zwei derartige Ebenen mit gleichen Vielecken legen, so sind die Geraden Kanten eines regelmässigen Vielflachs, welches ein neues ist, wenn das so gebildete körperliche Eck mit keinem der gewöhnlichen regelmässigen Vielflache übereinstimmt.

Das Vierflach liefert von einem Eck aus nur diejenigen drei gleichen Geraden, welche sein eigenes Eck bilden.

Der Würfel liefert von einem Eck aus drei gleiche Geraden, welche sein eigenes Eck bilden; ferner drei Diagonalen der Seitenflächen, welche aber ein Eck des Vierflachs bilden, deren zwei in dieser Weise in den Würfel gestellt werden können.

Das Achtflach liefert von einem Eck aus vier Gerade, welche seine eigenen Kanten sind. Eine derselben mit einer benachbarten liefert die Seitenflächen und das Eck des Achtflachs selbst; eine mit einer gegenüberstehenden liefert ein Quadrat, aber nur eines.

Das Zwölfflach besitzt zwei gegenüberstehende Ecken, während die übrigen zu 3 und zu 6 in vieren zu dem Durchmesser jener Ecken senkrechten Ebenen liegen. Demnach gibt es ausser dem Durchmesser viererlei Abstände eines Ecks von den übrigen.

a) Die kürzesten Geraden, welche Ecken eines Zwölfflachs verbinden, sind die Kanten desselben, von denen 3 von einem Eck ausgehen. Sie bilden das Eck des Zwölfflachs selbst.

b) Die nächst längeren Geraden im Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten, von welchen sechs von einem Eck aus möglich sind. Zwei benachbarte in einer Seitenfläche liefern das Fünfeck dieser Fläche, aber jede Gerade nur eins. Zwei benachbarte mit einer zwischenliegenden Kante liefern ein regelmässiges Dreieck, aber jede Gerade nur eins. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden und Kante liefern ein Quadrat, und jede Gerade deren zwei. Das dadurch entstehende regelmässige Vielflach hat aber das Eck des Würfels, ist also ein Würfel. Deren gehen 2 von jedem Eck aus und im ganzen Zwölfflach stehen 5. Zwei Gerade mit zwei zwischenliegenden Geraden nach jeder Seite liefern ein regelmässiges Fünfeck, aber jede Gerade nur eins.

c) Die nächst längeren Geraden in dem Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens drei Kanten, von denen 6 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte, welche nach den Endpunkten einer Kante gehen, liefern kein regelmässiges Vieleck. Zwei benachbarte, welche nach den Endpunkten einer Diagonale einer Seitenfläche gehen, liefern ebenfalls kein regelmässiges Vieleck. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden liefern ein regelmässiges Dreieck, und jede Gerade deren zwei. Das dadurch entstehende regelmässige Vielflach hat aber das Eck eines Vierflachs, ist also ein Vierflach. Deren gehen 2 von jedem Eck aus und im ganzen Zwölfflach stehen 10. Zwei Gerade mit zwei zwischenliegenden Geraden nach jeder Seite liefern kein regelmässiges Vieleck.

d) Die nächst längeren Geraden in dem Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens vier Kanten, von denen 3 von einem Eck ausgehen. Je zwei derselben liefern in ihrer Ebene ein regelmässiges Fünfeck, welches durch die zwei Geraden, welche Seiten sind, als Fünfeck zweiter Art bestimmt wird. Durch jede Seite gehen deren zwei. Das entstehende regelmässige

Vielflach mit 3flächigen Ecken ist kein gewöhnliches, da seine Seitenflächen Fünfecke zweiter Art sind. Es ist das nachher zu beschreibende 20 eckige Sternzwölfflach.

Das Zwanzigflach besitzt zwei gegenüberstehende Ecken, während die übrigen zu 5 in zweien zu dem Durchmesser jener Ecken senkrechten Ebenen liegen. Demnach gibt es ausser dem Durchmesser zweierlei Abstände eines Ecks von den übrigen.

a) Die kürzesten Geraden, welche Ecken eines Zwanzigflachs verbinden, sind die Kanten desselben, von denen 5 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte liefern die Seitenflächen und das Eck des Zwanzigflachs selbst. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Kante liefern ein regelmässiges Fünfeck erster Art, und jede deren zwei. Das dadurch gebildete Eck ist 5flächig und von zweiter Art, d. i. ein Sterneck. Das entstehende regelmässige Vielflach ist daher kein gewöhnliches; es ist das sterneckige Zwölfflach.

b) Die nächst längeren Geraden in dem Zwanzigflach sind die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten, von denen 5 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte liefern ein regelmässiges Fünfeck zweiter Art, und jede deren zwei. Die Ecken derselben fallen mit denen der Fünfecke erster Art zusammen, welche die Seitenflächen des sterneckigen Zwölfflachs sind. Das gebildete Eck ist 5flächig und von der ersten Art. Das entstehende regelmässige Vielflach ist wegen der 5eckigen Seitenflächen zweiter Art kein gewöhnliches; es ist das 12 eckige Sternzwölfflach. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden liefern ein regelmässiges Dreieck, und jede deren zwei. Das dadurch gebildete Eck ist 5flächig und von der zweiten Art. Das entstehende regelmässige Vielflach ist daher kein gewöhnliches; es ist das sterneckige Zwanzigflach.

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft, und es gibt daher nur die vier ermittelten regelmässigen Vielflache höherer Art. Cauchy ist bei dem Beweise dieses Satzes nicht von den Ecken, sondern von den Flächen ausgegangen, indem er zeigte, dass die Flächen jedes regelmässigen Vielflachs höherer Art mit denjenigen eines gewöhnlichen regelmässigen Vielflachs zusammenfallen müssen. Der Beweis ist ganz reciprok mit dem Bertrand's, nach welchem unser Beweis gebildet ist, wie überhaupt Ecken und Flächen reciprok sind. Wir werden jene Wahrheit, dass die Kerne der neuen Vielflache regelmässige Vielflache erster Art sind, bei der Anweisung zur Herstellung des Modelles benutzen.

46. Bei der Beschreibung der regelmässigen Vielflache höherer Art, welche jetzt folgen soll, bezeichnen wir die Art des Vielflachs, d. i. die Anzahl, wie oftmal es die Kugel bedeckt, mit A, die Art der Seitenfläche mit a, die Art des Ecks mit α.

1) Das zwanzigeckige Sternzwölfflach, von Poinsot Sterndodekaëder der vierten Art (dodécaèdre étoilé de quatrième espèce), von Cayley grosses Sterndodekaëder (great stellated dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 12, 13 in der geraden Stellung auf einem Eck und auf 5 Ecken und auf Taf. III perspectivisch dargestellt. Es entsteht, wie schon bemerkt, indem man in dem gewöhnlichen Zwölfflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens 4 Kanten legt, welche nach den dreien dem gegenüberstehenden zunächstliegenden Ecken gehen. Durch diese Diagonalen als Kanten sind drei aus Sternfünfecken ($a = 2$) gebildete Seitenflächen bestimmt, deren das Vielflach $\frac{3 \cdot 20}{5} = 12$ besitzt. Das Eck ist dreiflächig und erster Art ($\alpha = 1$). Die Anzahl der Kanten ist $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$. Um die Zahl A zu ermitteln, projiciren wir eine Seitenfläche, das Sternfünfeck $b_1\ b_3\ b_5\ b_2\ b_4\ b_1$

in Fig. 20 vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwölfflach. Fällt man von b_2 und b_5 Senkrechte auf die Kante $a_1\, b_1$, so treffen sich diese in deren Mitte h_1; die Ebene $b_2\, h_1\, b_5$, welche die Sehne $a_1\, b_1$ senkrecht halbirt, geht durch den Mittelpunkt m. Daher ist $b_2\, h_1\, b_5$ die Projection der Kante $b_2\, b_5$ auf das gewöhnliche Zwölfflach. Nimmt man die Fläche des Fünfecks $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ als Einheit, und bedenkt, dass bei der Flächenbestimmung eines Sternfünfecks der innere Theil doppelt zählt, dass ferner $a_1\, a_2\, h_2\, o_4\, h_1 = \frac{3}{5}$, $h_1\, b_1\, o_4 + h_2\, b_2\, o_4 = \frac{1}{5}$, so ist die Projection des Sternfünfecks auf das gewöhnliche Zwölfflach $2 + 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{3}{5} + 5 \,.\, \frac{1}{5} = 7$. Daher $A = \frac{12 \,.\, 7}{12} = 7$, oder unser Vielflach bedeckt genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden, wobei die Schnittpunkte auf einem inneren Flächentheil des Sternfünfecks doppelt zählen. Poinsot rechnete den inneren Theil des Sternfünfecks nur einmal zu seiner Fläche, und erhielt daher die Anzahl der Kugelbedeckungen, die er mit E bezeichnet, $= 1 + 5 \,.\, \frac{3}{5} = 4$. Daher nennt er das Zwölfflach von der vierten Art. Wir werden alsbald auf diesen Unterschied zurückkommen.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Fläche des gewöhnlichen Zwanzigflachs eine gerade Pyramide aufsetzt, deren Seitenflächen Verlängerungen der Ebenen der regelmässigen Fünfecke sind, welche durch eine Kante der betrachteten Seitenfläche und noch durch 4 andre Kanten des Zwanzigflachs als Seiten gebildet werden, oder, was dasselbe ist, eine Pyramide, deren Endkanten Verlängerungen der Kanten des Zwanzigflachs sind, welche durch die Ecken der betrachteten Seitenfläche gehen, aber nicht zu Flächen gehören, welche an ihr mit einer Kante anliegen. Oder man kann das zusammenhängende Netz dieser 20 Pyramiden nach Taf. II bilden, indem man beachtet, dass der Winkel des Sternfünfecks $\frac{2}{5}$ Rechte ist. Nach den stark ausgezogenen Linien muss das Papier oder der Pappdeckel ganz durchschnitten, nach den fein ausgezogenen von oben, nach den punktirten von unten eingeschnitten werden.

47. 2) Das zwölfeckige Sternzwölfflach, von Poinsot Sterndodekaëder der zweiten Art (dodécaèdre étoilé de seconde espèce), von Cayley kleines Sterndodekaëder (small stellated dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 14, 15 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächstliegenden Ecken gehen. Durch je zwei aufeinanderfolgende als Kanten sind 5 aus Sternfünfecken ($\alpha = 2$) gebildete Seitenflächen bestimmt, deren das Vielflach $\frac{5 \,.\, 12}{5} = 12$ besitzt. Das Eck ist fünfflächig und erster Art ($\alpha = 1$). Die Anzahl der Kanten ist $\frac{5 \,.\, 12}{2} = 30$. Um die Zahl A zu ermitteln, projiciren wir eine Seitenfläche, das Sternfünfeck $b_1\, b_3\, b_5\, b_2\, b_4\, b_1$, Fig. 21, vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwanzigflach. Dabei projicirt sich eine Seite $b_2\, b_5$ auf die gebrochene Linie $b_2\, h_1\, b_5$, wo wieder h_1 in der Mitte von ab_1. Daraus ergibt sich, dass die Projection des Sternfünfecks $= 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2}$ oder 5 Dreiecksflächen, woraus $A = \frac{5 \,.\, 12}{20} = 3$ folgt. Das Vielflach bedeckt also genau 3mal die Kugel und kann von einer Geraden in höchstens 6 Punkten geschnitten werden. Poinsot schreibt ihm aus derselben Ursache wie

bei dem vorhergehenden Vielflach nur ein zweifaches Decken der Kugel zu und nennt es daher von der zweiten Art.

Um das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs zu bilden, denke man sich die an eine Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs anstossenden 5 Flächen und deren Durchschnittskanten verlängert und dadurch eine Pyramide über derselben gebildet. Eine solche Pyramide setze man auf jede Seitenfläche auf. Oder man bilde das zusammenhängende Netz dieser 12 Pyramiden nach Taf. II.

48. 3) Das sterneckige Zwanzigflach, von Poinsot Ikosaëder der siebenten Art (icosaèdre de septième espèce), von Cayley grosses Ikasaëder (great icosahedron) genannt, ist in den Fig. 16, 17 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächst liegenden Ecken gehen. Diese Geraden sind die Kanten des neuen Zwanzigflachs und fallen mit denen des zwölfeckigen Sternzwölfflachs zusammen. Die Flächen werden aber hier von einem Eck aus durch je zwei Kanten gelegt, welche durch eine solche getrennt sind. Diese Flächen sind Dreiecke ($a = 1$), und das Vielflach hat deren $\frac{5\,.\,12}{3} = 20$. Das Eck ist fünfflächig und zweiter Art ($\alpha = 2$). Da sich jede der 20 dreieckigen Seitenflächen auf je $4 + 6.\frac{1}{2}$ oder 7 der 20 Seitenflächen des gewöhnlichen Zwanzigflachs projicirt, Fig. 22, so ist $A = \frac{20\,.\,7}{20} = 7$. Das Vielflach bedeckt also genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden. In diesen Zahlen ist keine Abweichung von denen Poinsot's.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs aus den Ecken dieses Fünfecks ein Sternfünfeck zeichnet und über diesem eine gerade Sternpyramide aufstellt, deren 5 eigentliche Kanten die Verlängerungen der 5 dritten Kanten des gewöhnlichen Zwölfflachs sind, welche nach den Ecken der gewählten Seitenfläche laufen. Dann müssen noch Stücke des Kerns ausgestemmt werden nach der Verlängerung jeder Fläche einer aufgesetzten Pyramide bis zu ihrem nächsten Schnitte mit einer andren Fläche, welche durch eine Kante des Kerns geht. Will man dies Ausstemmen vermeiden, so verbinde man die Mitten der Seiten einer Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs zu einem Fünfeck erster Art, setze darauf eine gerade Pyramide, deren Kanten nach den Mitten der Kanten des Zwölfflachs laufen, welche von den Ecken der der erstbetrachteten gegenüberstehenden Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs ausgehen und nicht in der letzteren liegen; nachdem 12 solche Pyramiden aufgesetzt sind, setze man wieder auf alle Seitenflächen derselben neue Pyramiden auf, von denen zwei Seitenflächen Verlängerungen der anliegenden Seitenflächen der ersten Pyramiden sind, und deren dritte durch den Schnitt der zwei genannten Seitenflächen mit den übereinstimmenden benachbarter Pyramiden bestimmt ist. An diesen Körper müssen dann noch 30 Zwickel angesetzt werden, welche die bis jetzt noch ausgelassenen mittlern Stücke der Kanten des Zwanzigflachs und die zwei davon ausgehenden Flächen zu Kanten und Flächen haben und sonst noch durch vier Flächen des bis dahin gebildeten Theiles begrenzt sind. Man kann auch das Modell aus dem auf Taf. II gezeichneten zusammenhängenden Netze des äusserlich sichtbaren Theiles unsres Zwanzigflachs herstellen. Fig. 26 zeigt die ganze dreieckige Seitenfläche desselben; die 9 schraffirten klei-

neren Dreiecke von zweierlei Gestalt bleiben von aussen sichtbar und werden daher im Netze benutzt. Die Winkel, welche sich auf Grundlage der in der Figur dargestellten Construction ergeben, sind dort beigeschrieben. Bei Anfertigung des Modelles dieses Vielflachs aus dem Netze ist es räthlich, in das Innere jeder Sternpyramide einen sternfünfeckigen Carton herein zu leimen, um dem Ganzen die gehörige Steifigkeit zu geben.

49. 4) Das sterneckige Zwölfflach, von Poinsot Dodekaëder der dritten Art (dodécaèdre de troisième espèce), von Cayley grosses Dodekaëder (great dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 18, 19 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die fünf Kanten auch als Kanten des neuen Vielflachs beibehält, die Flächen aber durch je zwei Kanten legt, welche durch eine solche getrennt sind. Diese Flächen sind Fünfecke erster Art ($a = 1$), und das Vielflach hat deren $\frac{5 \cdot 12}{5} = 12$. Das Eck ist fünfflächig und zweiter Art ($\alpha = 2$). Da sich eine der fünfeckigen Seitenflächen gerade auf 5 Dreiecke des gewöhnlichen Zwanzigflachs projicirt, Fig. 23, so ist $A = \frac{5 \cdot 12}{20} = 3$. Das Vielflach bedeckt also genau 3mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 6 Punkten geschnitten werden. In diesen Zahlen ist keine Abweichung von denen Poinsot's.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man nach vollendetem zwölfeckigen Sternzwölfflach 30 Zwickel in der Gestalt von Vierflachen einsetzt, deren jedes zu seinen 6 Kanten hat: eine Kante des gewöhnlichen Zwölfflachs, welches den Kern bildet, die vier weiteren Kanten der 2 Seitenflächen der aufgesetzten Pyramiden, welche von jener Kante ausgehen, die Verbindungslinie der Spitzen dieser beiden Pyramiden. Oder man kann 2 . 12 dieser Zwickel sogleich in einem Stücke mit den 12 Pyramiden bilden; je 2 derselben bilden mit der 5seitigen Kernpyramide, mit der sie gemeinschaftliche Grundflächen haben, zusammen eine Pyramide mit gleichschenklig dreieckiger Grundfläche. Oder man kann das zusammenhängende Netz des äusseren Theiles nach Taf. II bilden. Fig. 24 zeigt eine ganze Seitenfläche, deren 5 schraffirte Theile von aussen sichtbar bleiben und deswegen im Netze benutzt werden (Fig. 25). Man kann sich auch dadurch eine Vorstellung von unserem Vielflach machen, dass man auf jede Seitenfläche des gewöhnlichen Zwanzigflachs nach innen eine gerade Pyramide aufsetzt, deren Kanten Diagonalen über wenigstens 2 Kanten des Zwanzigflachs sind.

50. Die folgende Tabelle stellt die Zahlen zusammen, welche für die gewöhnlichen und die Sternvielflache gelten, wobei bedeuten soll:

F die Anzahl der Flächen;
E die Anzahl der Ecken;
K die Anzahl der Kanten;
n die Anzahl der Seiten einer Fläche;
ν die Anzahl der Seiten (Flächen) eines Ecks;
a die Zahl, welche die Art der Fläche bestimmt, oder die Anzahl, wie oftmal die Seiten der Fläche den Umfang des Kreises umspannen;
α die Zahl, welche die Art des Ecks bestimmt, oder die Anzahl, wie oftmal die Flächen des Ecks den Umfang eines Kegels umspannen;

A die Zahl, welche die Art des Vielflachs bestimmt, oder die Anzahl, wie oftmal das Vielflach die Kugel bedeckt, wobei eine Seitenfläche als die Summe der Dreiecke betrachtet wird, deren Spitze im Mittelpunkt und deren Grundlinien die Seiten der Fläche sind;

A' die Anzahl, wie oftmal das Vielflach die Kugel bedeckt, gezählt in der Art Poinsot's, wobei jeder Theil der Fläche eines Sternvielecks nur einmal gerechnet wird.

Das Vielflach	F	E	K	n	ν	a	α	A		A'
Vierflach	4	4	6	3	3	1	1	1		1
Sechsflach	6	8	12	4	3	1	1	1		1
Achtflach	8	6	12	3	4	1	1	1		1
Zwölfflach	12	20	30	5	3	1	1	1		1
Zwanzigflach	20	12	30	3	5	1	1	.1		1
20eckiges Sternzwölfflach	12	20	30	5	3	2	1	7		4
Sterneckiges Zwanzigflach	20	12	30	3	5	1	2	7		7
12eckiges Sternzwölfflach	12	12	30	5	5	2	1	3		2
Sterneckiges Zwölfflach	12	12	30	5	5	1	2	3		3

Dabei sind die polar-reciproken Vielflache in Paare geschrieben. Das Vierflach ist mit sich selbst reciprok; das Sechsflach mit dem Achtflach, so dass, wenn man in Bezug auf eine concentrische Kugel für jedes Eck, jede Kante, jede Fläche des Sechsflachs die polare Ebene, die polare Gerade und den polaren Punkt sucht, diese die Flächen, Kanten und Ecken des Achtflachs sind. Daher sind auch die Anzahl derselben, wie die Tabelle es zeigt, wechselsweise gleich. Ebenso sind Zwölfflach und Zwanzigflach reciprok. Die Sternvielflache bilden auch zwei reciproke Paare; bei jedem Paare sind F und E, K und K, n und ν, a und α, A und A wechselsweise gleich. Wählt man dagegen statt A die Zahl A' von Poinsot, so findet diese Gleichheit nicht statt; und dies ist der Grund, welcher Cayley bestimmte, die Flächen der Sternvielecke in der angeführten Weise zu zählen, und welcher uns zu dem in Nr. 23 aufgestellten Begriffe der Fläche eines Vielecks überhaupt führte.

51. Was die Benennung der neuen regelmässigen Vielflache betrifft, so konnten wir Poinsot nicht folgen, welcher die Art nach der Zahl A' bezeichnete, weil wir mit Cayley A an die Stelle von A' setzen. Hätten wir nun die Benennung entsprechend geändert, so wären noch weitere Zusätze nöthig gewesen, um die dann entstandenen beiden

Zwölfflache dritter Art zu unterscheiden. Ausserdem gibt aber die Anführung der Art keine Anschaulichkeit. Wir konnten aber auch Cayley nicht folgen, weil die Bezeichnung gross und klein willkürlich ist und gerade so gut umgekehrt werden kann. Wir unterschieden daher die 4 Vielflache in sternflächige und sterneckige, so dass wir die Benennung sternflächiges Vielflach oder kürzer Sternvielflach und sterneckiges Vielflach erhielten. Die beiden letzterer Art unterscheiden sich sofort durch die Anzahl der Flächen als sterneckiges Zwanzigflach und sterneckiges Zwölfflach; die beiden ersteren haben aber die gleiche Anzahl von 12 Flächen; wir unterschieden sie daher noch durch die Anzahl der Ecken als zwanzigeckiges Sternzwölfflach und zwölfeckiges Sternzwölfflach.

52. Mit Zugrundlegung unseres Begriffes von dem Flächeninhalt eines Vielecks lässt sich die Beziehung, welche Poinsot zwischen den Werthen F, A, n, ν, α aufstellte, die aber nur für Vielflache mit Seitenflächen erster Art gilt, auch für solche mit Seitenflächen einer höheren Art ausdehnen. Projicirt man ein Vielflach vom Mittelpunkte einer Kugel aus auf diese Kugel, so ist die Projection einer $n$eckigen Seitenfläche ein aus grössten Kreisen gebildetes Kugel-n-eck. Wir zerlegen dann dasselbe von einem Punkte aus durch grösste Kreisbögen nach den Ecken in Dreiecke, wobei wir den Punkt im Inneren wählen, was bei den regelmässigen Vielecken, auf welche wir die Anwendung machen werden, immer möglich ist. Messen wir nun den Winkel zweier grössten Kreise durch den Inhalt des Kugeldreiecks, welches durch sie und denjenigen grössten Kreisbogen gebildet wird, zu welchem der Scheitel des Winkels der Pol ist, und setzen wir dabei das Mass des rechten Winkels $= 1$ und demnach die Kugeloberfläche $= 8$, so ist bekanntlich der Inhalt eines jener Theildreiecke $i = w - 2$, wenn w die Summe der Winkel im Dreiecke ist. Der Inhalt I des Kugelvielecks ist daher

$$I = \Sigma w - 2n,$$

und da $\Sigma w = W + 4a$, wobei W die Summe der Vieleckswinkel und $4a$ die Summe der an dem inneren Punkte zusammenstossenden Dreieckswinkel, so ist

$$I = W - 2n + 4a. \tag{5}$$

Ist das Vielflach regelmässig und liegt die Kugel mit ihm concentrisch, so ist auch das sphärische n-Eck regelmässig, und wenn v ein Winkel desselben, so ist $W = n \,.\, v$; daher

$$I = nv - 2n + 4a.$$

Da die F Flächen des Vielflachs A mal die Kugel bedecken, ist

$$F(nv - 2n + 4a) = A \,.\, 8.$$

Ferner ergibt sich für die ν Winkel an einem Ecke, welche α mal 4 Rechte bilden,

$$\nu v = \alpha \,.\, 4, \quad v = \frac{\alpha \,.\, 4}{\nu}.$$

Diesen Werth in die letzte Gleichung eingesetzt, gibt

$$F\left(\frac{n\alpha \,.\, 4}{\nu} - 2n + 4a\right) = A \,.\, 8. \tag{6}$$

In dieser Gleichung ist zu beachten, dass die 6 darin vorkommenden unbestimmten Grössen F, n, ν, a, α, A ganze positive Zahlen sind; dass $F > 3$, $n > 2$, $\nu > 2$, $a < \frac{n}{2}$, $\alpha < \frac{\nu}{2}$,

und dass a Primzahl zu n und α Primzahl zu ν ist. Es lassen sich aus ihr alle regelmässigen Vielflache aufzählen, und es ist dann nur noch zu untersuchen, ob ein nach den Ergebnissen gebildetes Vielflach geschlossen ist.

53. Bei den **gewöhnlichen Vielflachen** ist $a = 1$, $\alpha = 1$, $A = 1$, daher

$$F\left(\frac{n \cdot 4}{\nu} - 2n + 4\right) = 8. \tag{7}$$

Für $n = 3$ wird $F\left(\frac{12}{\nu} - 2\right) = 8$; dann liefert

$\nu = 3 : F = 4$, das Vierflach;
$\nu = 4 : F = 8$, das Achtflach;
$\nu = 5 : F = 20$, das Zwanzigflach;
$\nu = 6 : F = \infty$, die Kugel, als Grenze;
$\nu > 6 : F$ negativ.

Für $n = 4$ wird $F\left(\frac{16}{\nu} - 4\right) = 8$; dann liefert

$\nu = 3 : F = 6$, das Sechsflach;
$\nu = 4 : F = \infty$, die Kugel, als Grenze;
$\nu > 4 : F$ negativ.

Für $n = 5$ wird $F\left(\frac{20}{\nu} - 6\right) = 8$; dann liefert

$\nu = 3 : F = 12$, das Zwölfflach;
$\nu > 3 : F$ negativ.

Für $n = 6$ wird $F\left(\frac{24}{\nu} - 8\right) = 8$; dann liefert

$\nu = 3 : F = \infty$, die Kugel, als Grenze;
$\nu > 3 : F$ negativ.

Für $n > 6$ wird F stets negativ; denn die Gleichung (7) lässt sich auch schreiben

$$\frac{8}{F} = \frac{n \cdot 4}{\nu} - 2n + 4 = \frac{2}{\nu}\left[n\left(2 - \tfrac{2}{3}\nu\right) + \nu\left(2 - \tfrac{1}{3}n\right)\right],$$

und darin ist stets $2 - \frac{2}{3}\nu$ Null oder negativ, und $2 - \frac{1}{3}n$ ist für $n > 6$ negativ. Die danach gebildeten Vielflache sind bekanntlich alle geschlossen, so dass es 5 regelmässige Vielflache erster Art gibt. Wenn man die Grenze noch herein zieht, so ist das sechste die Kugel, welche auf 3 Weisen, nämlich bei 3-, 4- und 6-eckigen Seitenflächen, als Grenzvielflach betrachtet werden kann.

54. Bei den **Vielflachen höherer Art** wird a, α und A nicht als 1 vorausgesetzt. Wollte man $a = \alpha = 1$, dagegen $A > 1$ setzen, so würde man F als ganze Vielfache der in der vorigen Nr. erhaltenen Werthe, d. h. man würde Vielflache erhalten, deren Flächen sich zu A decken. Die Vielflache wären also A gleiche zur Deckung in einander gestellte gewöhnliche Vielflache. Demnach kann nicht a und α gleichzeitig $= 1$ sein. Wir wollen die Formel (6) nur für diejenigen Fälle erörtern, welche zu den Vielflachen führen, die als

die einzig möglichen, also geschlossenen, nachgewiesen sind. Setzen wir zuerst $n = 3$, wobei nach den zu Ende der Nr. 52 angeführten Bedingungen $a < \frac{n}{2}$, also $a = 1$ ist, so kann man $\nu = 3$ und $\nu = 4$ machen; jedesmal ist nur ein Eck erster Art möglich, oder es muss $\alpha = 1$, weil $\alpha < \frac{\nu}{2}$ sein muss. Vereinigt man 5 Dreiecke an einem Eck, oder setzt $\nu = 5$, so kann $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ sein. $\alpha = 1$ liefert das gewöhnliche Zwölfflach, $\alpha = 2$ dagegen ein neues Vielflach.

Für $n = 3$, $a = 1$, $\nu = 5$, $\alpha = 2$, wird aus (6)

$$F\left(\frac{24}{5} - 6 + 4\right) = A \,.\, 8,$$

$$F = \frac{A \,.\, 20}{7}.$$

Die kleinsten möglichen Werthe für F und A sind $F = 20$ und $A = 7$, welche das sterneckige Zwanzigflach bestimmen, das die Kugelfläche 7mal bedeckt. Höhere Werthe für ν bei $n = 3$ liefern keine geschlossenen Vielflache mehr.

Für $n = 4$ gibt es kein neues Vielflach.

Für $n = 5$ kann zunächst $a = 1$ sein, so dass die Seitenflächen Fünfecke der ersten Art sind. $\nu = 3$ hat $\alpha = 1$ zur Folge, woraus wegen $a = \alpha = 1$ kein neues Vielflach entsteht. $\nu = 4$ hat wieder $\alpha = 1$ und daher ebenfalls kein neues Vielflach zur Folge; $\nu = 5$ lässt $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ zu. Nur $\alpha = 2$ kann ein neues Vielflach liefern.

Wir haben dann $n = 5$, $a = 1$, $\nu = 5$, $\alpha = 2$,

$$F = A \,.\, 4.$$

A muss mindestens gleich 2 sein, da schon $\alpha = 2$ ist; aber erst $A = 3$ liefert ein geschlossenes Vielflach mit $F = 12$ oder 12 Flächen, nämlich das sterneckige Zwölfflach, das die Kugel 3mal bedeckt. Höhere Werthe von ν bei $n = 5$ und $a = 1$ liefern keine geschlossenen Vielflache mehr.

Für $n = 5$ und $a = 2$, oder für Sternfünfecke als Seitenflächen wird für $\nu = 3$, $\alpha = 1$

$$F = \frac{A \,.\, 12}{7},$$

was für $A = 7$ und $F = 12$ das zwanzigeckige Sternzwölfflach liefert, das die Kugel 7mal bedeckt. Für $\nu = 5$, $\alpha = 1$ dagegen wird

$$F = A \,.\, 4,$$

wodurch für $A = 3$ und $F = 12$ das zwölfeckige Sternzwölfflach bestimmt ist, welches die Kugel 3mal bedeckt.

55. Die Euler'sche Formel zwischen der Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Vielflachs

$$E + F = K + 2$$

gilt bekanntlich nicht für alle Vielflache. Sie gilt hauptsächlich für diejenigen, welche auf

eine Kugel von deren Mittelpunkt aus so projicirt werden können, dass die Projection nirgends eine Verdopplung zeigt. Solche Vielflache sind die sternartigen nicht, und für sie gilt die Formel auch nicht. Wir wollen nun die von Poinsot gegebene Entwicklung einer neuen Formel, welche nur für zwei seiner Vielflache gilt, durch Beachtung des Begriffes der Fläche eines Sternvielecks so erweitern, dass sie auf alle 4 anwendbar ist.

Sei bei der Projection eines Vielflachs auf eine Kugel von deren Mittelpunkte aus wieder I der Flächeninhalt, W die Summe der Winkel der Projection einer Seitenfläche, sei durch n die Anzahl der Seiten und durch a die Art dieser Seitenfläche ausgedrückt, so gilt die Formel (5) Nr. 52

$$I = W - 2n + 4a.$$

Bezeichnen I', W', n', a' dieselben Grössen für eine zweite Seitenfläche u. s. w., so ist

$$I' = W' - 2n' + 4a',$$

u. s. w.

Fügt man diese Gleichungen zusammen, so wird

$$I + I' + \ldots = W + W' + \ldots - 2(n + n' + \ldots) + 4(a + a' + \ldots).$$

Für regelmässige Vielflache und die concentrische Kugel wird nun, wenn A die Art des Vielflachs oder die Anzahl der Bedeckungen der ganzen Kugel ($= 8$) ausdrückt,

$$I + I' + \ldots = A \,.\, 8.$$

Da ferner die Summe der Projectionen der Kantenwinkel um ein Eck herum so vielmal 4 Rechte, als die Art α des Ecks ausdrückt, und E die Anzahl der Ecken, so ist

$$W + W' + \ldots = \alpha \,.\, 4 \,.\, E.$$

Sodann ist $n + n' + \ldots$ gleich der doppelten Anzahl der Kanten, oder

$$n + n' + \ldots = 2K.$$

Da endlich $a = a' \ldots$ und F die Anzahl der Flächen, also auch die jener Posten, so wird

$$a + a' + \ldots = a \,.\, F.$$

Dies Alles in der obigen Gleichung eingeführt, so wird nach Theilung durch 4

$$\alpha \,.\, E + a F = K + 2A.$$

Für die gewöhnlichen regelmässigen Vielflache ist $\alpha = 1$, $a = 1$, $A = 1$ und es geht die Formel in die Euler'sche über.

Für das erste Paar reciproker Vielflache höherer Art, nämlich für das 20eckige Sternzwölfflach und das sterneckige Zwanzigflach ist $A = 7$, und die Gleichung wird $44 = 44$; für das zweite Paar, nämlich für das 12eckige Sternzwölfflach und das sterneckige Zwölfflach ist $A = 3$, und die Gleichung wird $36 = 36$.

45. **Es gibt nur vier regelmässige Vielflache höherer Art.**

Um dieselben zu finden, lege man gemäss der vorhergehenden Nr. von einem Eck eines gewöhnlichen regelmässigen Vielflachs der Reihe nach alle Gattungen von Geraden jedesmal nach den gleichweit entfernten übrigen Ecken, untersuche, ob durch zwei gleiche Gerade eine Ebene geht, in welcher die darin liegenden Ecken des Vielflachs zugleich die Ecken eines regelmässigen Vielecks bilden, von denen die zwei Geraden Seiten sind. Kann man durch jede Gerade zwei derartige Ebenen mit gleichen Vielecken legen, so sind die Geraden Kanten eines regelmässigen Vielflachs, welches ein neues ist, wenn das so gebildete körperliche Eck mit keinem der gewöhnlichen regelmässigen Vielflache übereinstimmt.

Das Vierflach liefert von einem Eck aus nur diejenigen drei gleichen Geraden, welche sein eigenes Eck bilden.

Der Würfel liefert von einem Eck aus drei gleiche Geraden, welche sein eigenes Eck bilden; ferner drei Diagonalen der Seitenflächen, welche aber ein Eck des Vierflachs bilden, deren zwei in dieser Weise in den Würfel gestellt werden können.

Das Achtflach liefert von einem Eck aus vier Gerade, welche seine eigenen Kanten sind. Eine derselben mit einer benachbarten liefert die Seitenflächen und das Eck des Achtflachs selbst; eine mit einer gegenüberstehenden liefert ein Quadrat, aber nur eines.

Das Zwölfflach besitzt zwei gegenüberstehende Ecken, während die übrigen zu 3 und zu 6 in vieren zu dem Durchmesser jener Ecken senkrechten Ebenen liegen. Demnach gibt es ausser dem Durchmesser viererlei Abstände eines Ecks von den übrigen.

a) Die kürzesten Geraden, welche Ecken eines Zwölfflachs verbinden, sind die Kanten desselben, von denen 3 von einem Eck ausgehen. Sie bilden das Eck des Zwölfflachs selbst.

b) Die nächst längeren Geraden im Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten, von welchen sechs von einem Eck aus möglich sind. Zwei benachbarte in einer Seitenfläche liefern das Fünfeck dieser Fläche, aber jede Gerade nur eins. Zwei benachbarte mit einer zwischenliegenden Kante liefern ein regelmässiges Dreieck, aber jede Gerade nur eins. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden und Kante liefern ein Quadrat, und jede Gerade deren zwei. Das dadurch entstehende regelmässige Vielflach hat aber das Eck des Würfels, ist also ein Würfel. Deren gehen 2 von jedem Eck aus und im ganzen Zwölfflach stehen 5. Zwei Gerade mit zwei zwischenliegenden Geraden nach jeder Seite liefern ein regelmässiges Fünfeck, aber jede Gerade nur eins.

c) Die nächst längeren Geraden in dem Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens drei Kanten, von denen 6 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte, welche nach den Endpunkten einer Kante gehen, liefern kein regelmässiges Vieleck. Zwei benachbarte, welche nach den Endpunkten einer Diagonale einer Seitenfläche gehen, liefern ebenfalls kein regelmässiges Vieleck. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden liefern ein regelmässiges Dreieck, und jede Gerade deren zwei. Das dadurch entstehende regelmässige Vielflach hat aber das Eck eines Vierflachs, ist also ein Vierflach. Deren gehen 2 von jedem Eck aus und im ganzen Zwölfflach stehen 10. Zwei Gerade mit zwei zwischenliegenden Geraden nach jeder Seite liefern kein regelmässiges Vieleck.

d) Die nächst längeren Geraden in dem Zwölfflach sind die Diagonalen über wenigstens vier Kanten, von denen 3 von einem Eck ausgehen. Je zwei derselben liefern in ihrer Ebene ein regelmässiges Fünfeck, welches durch die zwei Geraden, welche Seiten sind, als Fünfeck zweiter Art bestimmt wird. Durch jede Seite gehen deren zwei. Das entstehende regelmässige

Vielflach mit 3flächigen Ecken ist kein gewöhnliches, da seine Seitenflächen Fünfecke zweiter Art sind. Es ist das nachher zu beschreibende 20eckige Sternzwölfflach.

Das Zwanzigflach besitzt zwei gegenüberstehende Ecken, während die übrigen zu 5 in zweien zu dem Durchmesser jener Ecken senkrechten Ebenen liegen. Demnach gibt es ausser dem Durchmesser zweierlei Abstände eines Ecks von den übrigen.

a) Die kürzesten Geraden, welche Ecken eines Zwanzigflachs verbinden, sind die Kanten desselben, von denen 5 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte liefern die Seitenflächen und das Eck des Zwanzigflachs selbst. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Kante liefern ein regelmässiges Fünfeck erster Art, und jede deren zwei. Das dadurch gebildete Eck ist 5flächig und von zweiter Art, d. i. ein Sterneck. Das entstehende regelmässige Vielflach ist daher kein gewöhnliches; es ist das sterneckige Zwölfflach.

b) Die nächst längeren Geraden in dem Zwanzigflach sind die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten, von denen 5 von einem Eck ausgehen. Zwei benachbarte liefern ein regelmässiges Fünfeck zweiter Art, und jede deren zwei. Die Ecken derselben fallen mit denen der Fünfecke erster Art zusammen, welche die Seitenflächen des sterneckigen Zwölfflachs sind. Das gebildete Eck ist 5flächig und von der ersten Art. Das entstehende regelmässige Vielflach ist wegen der 5eckigen Seitenflächen zweiter Art kein gewöhnliches; es ist das 12eckige Sternzwölfflach. Zwei nicht benachbarte mit einer zwischenliegenden Geraden liefern ein regelmässiges Dreieck, und jede deren zwei. Das dadurch gebildete Eck ist 5flächig und von der zweiten Art. Das entstehende regelmässige Vielflach ist daher kein gewöhnliches; es ist das sterneckige Zwanzigflach.

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft, und es gibt daher nur die vier ermittelten regelmässigen Vielflache höherer Art. Cauchy ist bei dem Beweise dieses Satzes nicht von den Ecken, sondern von den Flächen ausgegangen, indem er zeigte, dass die Flächen jedes regelmässigen Vielflachs höherer Art mit denjenigen eines gewöhnlichen regelmässigen Vielflachs zusammenfallen müssen. Der Beweis ist ganz reciprok mit dem Bertrand's, nach welchem unser Beweis gebildet ist, wie überhaupt Ecken und Flächen reciprok sind. Wir werden jene Wahrheit, dass die Kerne der neuen Vielflache regelmässige Vielflache erster Art sind, bei der Anweisung zur Herstellung des Modelles benutzen.

46. Bei der Beschreibung der regelmässigen Vielflache höherer Art, welche jetzt folgen soll, bezeichnen wir die Art des Vielflachs, d. i. die Anzahl, wie oftmal es die Kugel bedeckt, mit A, die Art der Seitenfläche mit a, die Art des Ecks mit α.

1) Das zwanzigeckige Sternzwölfflach, von Poinsot Sterndodekaëder der vierten Art (dodécaèdre étoilé de quatrième espèce), von Cayley grosses Sterndodekaëder (great stellated dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 12, 13 in der geraden Stellung auf einem Eck und auf 5 Ecken und auf Taf. III perspectivisch dargestellt. Es entsteht, wie schon bemerkt, indem man in dem gewöhnlichen Zwölfflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens 4 Kanten legt, welche nach den dreien dem gegenüberstehenden zunächstliegenden Ecken gehen. Durch diese Diagonalen als Kanten sind drei aus Sternfünfecken ($a = 2$) gebildete Seitenflächen bestimmt, deren das Vielflach $\frac{3 \cdot 20}{5} = 12$ besitzt. Das Eck ist dreiflächig und erster Art ($\alpha = 1$). Die Anzahl der Kanten ist $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$. Um die Zahl A zu ermitteln, projiciren wir eine Seitenfläche, das Sternfünfeck $b_1\, b_3\, b_5\, b_2\, b_4\, b_1$

in Fig. 20 vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwölfflach. Fällt man von b_2 und b_5 Senkrechte auf die Kante $a_1\, b_1$, so treffen sich diese in deren Mitte h_1; die Ebene $b_2\, h_1\, b_5$, welche die Sehne $a_1\, b_1$ senkrecht halbirt, geht durch den Mittelpunkt m. Daher ist $b_2\, h_1\, b_5$ die Projection der Kante $b_2\, b_5$ auf das gewöhnliche Zwölfflach. Nimmt man die Fläche des Fünfecks $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ als Einheit, und bedenkt, dass bei der Flächenbestimmung eines Sternfünfecks der innere Theil doppelt zählt, dass ferner $a_1\, a_2\, h_2\, o_4\, h_1 = \frac{2}{5}$, $h_1\, b_1\, o_4 + h_2\, b_2\, o_4 = \frac{1}{5}$, so ist die Projection des Sternfünfecks auf das gewöhnliche Zwölfflach $2 + 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{2}{5} + 5 \,.\, \frac{1}{5} = 7$. Daher $A = \frac{12 \,.\, 7}{12} = 7$, oder unser Vielflach bedeckt genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden, wobei die Schnittpunkte auf einem inneren Flächentheil des Sternfünfecks doppelt zählen. Poinsot rechnete den inneren Theil des Sternfünfecks nur einmal zu seiner Fläche, und erhielt daher die Anzahl der Kugelbedeckungen, die er mit E bezeichnet, $= 1 + 5 \,.\, \frac{3}{5} = 4$. Daher nennt er das Zwölfflach von der vierten Art. Wir werden alsbald auf diesen Unterschied zurückkommen.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Fläche des gewöhnlichen Zwanzigflachs eine gerade Pyramide aufsetzt, deren Seitenflächen Verlängerungen der Ebenen der regelmässigen Fünfecke sind, welche durch eine Kante der betrachteten Seitenfläche und noch durch 4 andre Kanten des Zwanzigflachs als Seiten gebildet werden, oder, was dasselbe ist, eine Pyramide, deren Endkanten Verlängerungen der Kanten des Zwanzigflachs sind, welche durch die Ecken der betrachteten Seitenfläche gehen, aber nicht zu Flächen gehören, welche an ihr mit einer Kante anliegen. Oder man kann das zusammenhängende Netz dieser 20 Pyramiden nach Taf. II bilden, indem man beachtet, dass der Winkel des Sternfünfecks $\frac{2}{5}$ Rechte ist. Nach den stark ausgezogenen Linien muss das Papier oder der Pappdeckel ganz durchschnitten, nach den fein ausgezogenen von oben, nach den punktirten von unten eingeschnitten werden.

47. 2) Das zwölfeckige Sternzwölfflach, von Poinsot Sterndodekaëder der zweiten Art (dodécaèdre étoilé de seconde espèce), von Cayley kleines Sterndodekaëder (small stellated dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 14, 15 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächstliegenden Ecken gehen. Durch je zwei aufeinanderfolgende als Kanten sind 5 aus Sternfünfecken ($\alpha = 2$) gebildete Seitenflächen bestimmt, deren das Vielflach $\frac{5 \,.\, 12}{5} = 12$ besitzt. Das Eck ist fünfflächig und erster Art ($\alpha = 1$). Die Anzahl der Kanten ist $\frac{5 \,.\, 12}{2} = 30$. Um die Zahl A zu ermitteln, projiciren wir eine Seitenfläche, das Sternfünfeck $b_1\, b_3\, b_5\, b_2\, b_4\, b_1$, Fig. 21, vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwanzigflach. Dabei projicirt sich eine Seite $b_2\, b_5$ auf die gebrochene Linie $b_2\, h_1\, b_5$, wo wieder h_1 in der Mitte von ab_1. Daraus ergibt sich, dass die Projection des Sternfünfecks $= 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2}$ oder 5 Dreiecksflächen, woraus $A = \frac{5 \,.\, 12}{20} = 3$ folgt. Das Vielflach bedeckt also genau 3mal die Kugel und kann von einer Geraden in höchstens 6 Punkten geschnitten werden. Poinsot schreibt ihm aus derselben Ursache wie

bei dem vorhergehenden Vielflach nur ein zweifaches Decken der Kugel zu und nennt es daher von der zweiten Art.

Um das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs zu bilden, denke man sich die an eine Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs anstossenden 5 Flächen und deren Durchschnittskanten verlängert und dadurch eine Pyramide über derselben gebildet. Eine solche Pyramide setze man auf jede Seitenfläche auf. Oder man bilde das zusammenhängende Netz dieser 12 Pyramiden nach Taf. II.

48. 3) Das sterneckige Zwanzigflach, von Poinsot Ikosaëder der siebenten Art (icosaèdre de septième espèce), von Cayley grosses Ikasaëder (great icosahedron) genannt, ist in den Fig. 16, 17 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächst liegenden Ecken gehen. Diese Geraden sind die Kanten des neuen Zwanzigflachs und fallen mit denen des zwölfeckigen Sternzwölfflachs zusammen. Die Flächen werden aber hier von einem Eck aus durch je zwei Kanten gelegt, welche durch eine solche getrennt sind. Diese Flächen sind Dreiecke ($a = 1$), und das Vielflach hat deren $\frac{5 \cdot 12}{3} = 20$. Das Eck ist fünfflächig und zweiter Art ($\alpha = 2$). Da sich jede der 20 dreieckigen Seitenflächen auf je $4 + 6 \cdot \frac{1}{2}$ oder 7 der 20 Seitenflächen des gewöhnlichen Zwanzigflachs projicirt, Fig. 22, so ist $A = \frac{20 \cdot 7}{20} = 7$. Das Vielflach bedeckt also genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden. In diesen Zahlen ist keine Abweichung von denen Poinsot's.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs aus den Ecken dieses Fünfecks ein Sternfünfeck zeichnet und über diesem eine gerade Sternpyramide aufstellt, deren 5 eigentliche Kanten die Verlängerungen der 5 dritten Kanten des gewöhnlichen Zwölfflachs sind, welche nach den Ecken der gewählten Seitenfläche laufen. Dann müssen noch Stücke des Kerns ausgestemmt werden nach der Verlängerung jeder Fläche einer aufgesetzten Pyramide bis zu ihrem nächsten Schnitte mit einer andren Fläche, welche durch eine Kante des Kerns geht. Will man dies Ausstemmen vermeiden, so verbinde man die Mitten der Seiten einer Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs zu einem Fünfeck erster Art, setze darauf eine gerade Pyramide, deren Kanten nach den Mitten der Kanten des Zwölfflachs laufen, welche von den Ecken der der erstbetrachteten gegenüberstehenden Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs ausgehen und nicht in der letzteren liegen; nachdem 12 solche Pyramiden aufgesetzt sind, setze man wieder auf alle Seitenflächen derselben neue Pyramiden auf, von denen zwei Seitenflächen Verlängerungen der anliegenden Seitenflächen der ersten Pyramiden sind, und deren dritte durch den Schnitt der zwei genannten Seitenflächen mit den übereinstimmenden benachbarter Pyramiden bestimmt ist. An diesen Körper müssen dann noch 30 Zwickel angesetzt werden, welche die bis jetzt noch ausgelassenen mittlern Stücke der Kanten des Zwanzigflachs und die zwei davon ausgehenden Flächen zu Kanten und Flächen haben und sonst noch durch vier Flächen des bis dahin gebildeten Theiles begrenzt sind. Man kann auch das Modell aus dem auf Taf. II gezeichneten zusammenhängenden Netze des äusserlich sichtbaren Theiles unsres Zwanzigflachs herstellen. Fig. 26 zeigt die ganze dreieckige Seitenfläche desselben; die 9 schraffirten klei-

in Fig. 20 vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwölfflach. Fällt man von b_2 und b_5 Senkrechte auf die Kante a_1 b_1, so treffen sich diese in deren Mitte h_1; die Ebene b_2 h_1 b_5, welche die Sehne a_1 b_1 senkrecht halbirt, geht durch den Mittelpunkt m. Daher ist b_2 h_1 b_5 die Projection der Kante b_2 b_5 auf das gewöhnliche Zwölfflach. Nimmt man die Fläche des Fünfecks a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 als Einheit, und bedenkt, dass bei der Flächenbestimmung eines Sternfünfecks der innere Theil doppelt zählt, dass ferner a_1 a_2 h_2 o_4 $h_1 = \frac{2}{5}$, h_1 b_1 o_4 + h_2 b_2 $o_4 = \frac{1}{5}$, so ist die Projection des Sternfünfecks auf das gewöhnliche Zwölfflach $2 + 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{2}{5} + 5 \,.\, \frac{1}{5} = 7$. Daher $A = \frac{12 \,.\, 7}{12} = 7$, oder unser Vielflach bedeckt genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden, wobei die Schnittpunkte auf einem inneren Flächentheil des Sternfünfecks doppelt zählen. Poinsot rechnete den inneren Theil des Sternfünfecks nur einmal zu seiner Fläche, und erhielt daher die Anzahl der Kugelbedeckungen, die er mit E bezeichnet, $= 1 + 5 \,.\, \frac{3}{5} = 4$. Daher nennt er das Zwölfflach von der vierten Art. Wir werden alsbald auf diesen Unterschied zurückkommen.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Fläche des gewöhnlichen Zwanzigflachs eine gerade Pyramide aufsetzt, deren Seitenflächen Verlängerungen der Ebenen der regelmässigen Fünfecke sind, welche durch eine Kante der betrachteten Seitenfläche und noch durch 4 andre Kanten des Zwanzigflachs als Seiten gebildet werden, oder, was dasselbe ist, eine Pyramide, deren Endkanten Verlängerungen der Kanten des Zwanzigflachs sind, welche durch die Ecken der betrachteten Seitenfläche gehen, aber nicht zu Flächen gehören, welche an ihr mit einer Kante anliegen. Oder man kann das zusammenhängende Netz dieser 20 Pyramiden nach Taf. II bilden, indem man beachtet, dass der Winkel des Sternfünfecks $\frac{2}{5}$ Rechte ist. Nach den stark ausgezogenen Linien muss das Papier oder der Pappdeckel ganz durchschnitten, nach den fein ausgezogenen von oben, nach den punktirten von unten eingeschnitten werden.

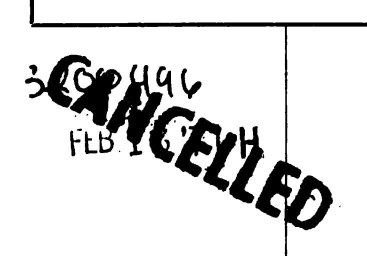
47. 2) **Das zwölfeckige Sternzwölfflach**, von Poinsot Sterndodekaëder der zweiten Art (dodécaèdre étoilé de seconde espèce), von Cayley kleines Sterndodekaëder (small stellated dodecahedron) genannt, ist in den Fig. 14, 15 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächstliegenden Ecken gehen. Durch je zwei aufeinanderfolgende als Kanten sind 5 aus Sternfünfecken ($\alpha = 2$) gebildete Seitenflächen bestimmt, deren das Vielflach $\frac{5 \,.\, 12}{5} = 12$ besitzt. Das Eck ist fünfflächig und erster Art ($\alpha = 1$). Die Anzahl der Kanten ist $\frac{5 \,.\, 12}{2} = 30$. Um die Zahl A zu ermitteln, projiciren wir eine Seitenfläche, das Sternfünfeck b_1 b_3 b_5 b_2 b_4 b_1, Fig. 21, vom Mittelpunkt aus auf das gewöhnliche Zwanzigflach. Dabei projicirt sich eine Seite b_2 b_5 auf die gebrochene Linie b_2 h_1 b_5, wo wieder h_1 in der Mitte von ab_1. Daraus ergibt sich, dass die Projection des Sternfünfecks $= 5 \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2}$ oder 5 Dreiecksflächen, woraus $A = \frac{5 \,.\, 12}{20} = 3$ folgt. Das Vielflach bedeckt also genau 3mal die Kugel und kann von einer Geraden in höchstens 6 Punkten geschnitten werden. Poinsot schreibt ihm aus derselben Ursache wie

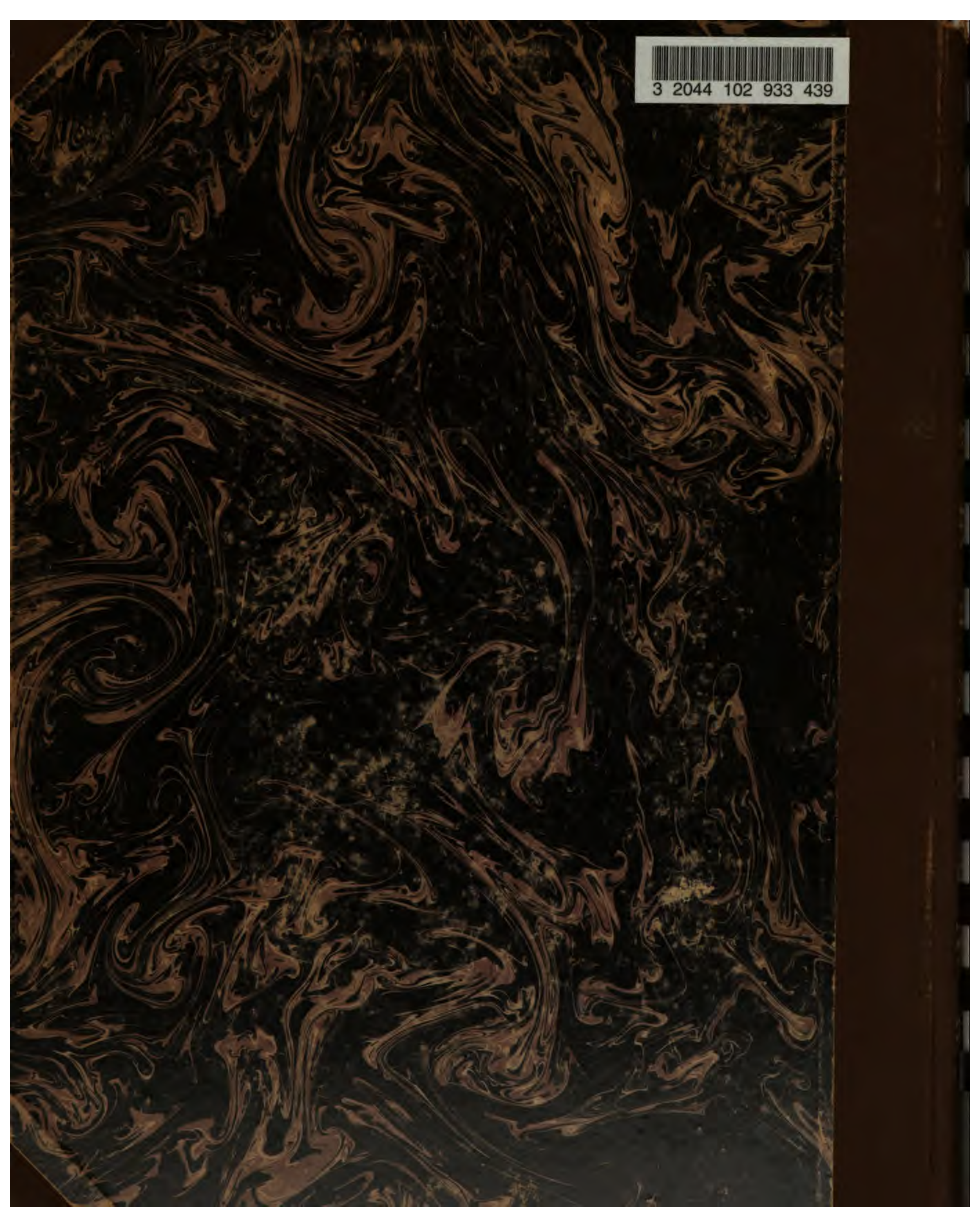
bei dem vorhergehenden Vielflach nur ein zweifaches Decken der Kugel zu und nennt es daher von der zweiten Art.

Um das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs zu bilden, denke man sich die an eine Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs anstossenden 5 Flächen und deren Durchschnittskanten verlängert und dadurch eine Pyramide über derselben gebildet. Eine solche Pyramide setze man auf jede Seitenfläche auf. Oder man bilde das zusammenhängende Netz dieser 12 Pyramiden nach Taf. II.

48. 3) Das sterneckige Zwanzigflach, von Poinsot Ikosaëder der siebenten Art (icosaèdre de septième espèce), von Cayley grosses Ikasaëder (great icosahedron) genannt, ist in den Fig. 16, 17 und auf Taf. III dargestellt. Es entsteht, indem man in dem gewöhnlichen Zwanzigflach von jedem Eck aus die Diagonalen über wenigstens zwei Kanten legt, welche nach den fünfen dem gegenüberstehenden zunächst liegenden Ecken gehen. Diese Geraden sind die Kanten des neuen Zwanzigflachs und fallen mit denen des zwölfeckigen Sternzwölfflachs zusammen. Die Flächen werden aber hier von einem Eck aus durch je zwei Kanten gelegt, welche durch eine solche getrennt sind. Diese Flächen sind Dreiecke ($a = 1$), und das Vielflach hat deren $\frac{5 \cdot 12}{3} = 20$. Das Eck ist fünfflächig und zweiter Art ($\alpha = 2$). Da sich jede der 20 dreieckigen Seitenflächen auf je $4 + 6 \cdot \frac{1}{2}$ oder 7 der 20 Seitenflächen des gewöhnlichen Zwanzigflachs projicirt, Fig. 22, so ist $A = \frac{20 \cdot 7}{20} = 7$. Das Vielflach bedeckt also genau 7mal die Kugelfläche und kann von einer Geraden in höchstens 14 Punkten geschnitten werden. In diesen Zahlen ist keine Abweichung von denen Poinsot's.

Das Modell des äusseren Theiles unseres Vielflachs kann man so bilden, dass man auf jede Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs aus den Ecken dieses Fünfecks ein Sternfünfeck zeichnet und über diesem eine gerade Sternpyramide aufstellt, deren 5 eigentliche Kanten die Verlängerungen der 5 dritten Kanten des gewöhnlichen Zwölfflachs sind, welche nach den Ecken der gewählten Seitenfläche laufen. Dann müssen noch Stücke des Kerns ausgestemmt werden nach der Verlängerung jeder Fläche einer aufgesetzten Pyramide bis zu ihrem nächsten Schnitte mit einer andren Fläche, welche durch eine Kante des Kerns geht. Will man dies Ausstemmen vermeiden, so verbinde man die Mitten der Seiten einer Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs zu einem Fünfeck erster Art, setze darauf eine gerade Pyramide, deren Kanten nach den Mitten der Kanten des Zwölfflachs laufen, welche von den Ecken der der erstbetrachteten gegenüberstehenden Seitenfläche des gewöhnlichen Zwölfflachs ausgehen und nicht in der letzteren liegen; nachdem 12 solche Pyramiden aufgesetzt sind, setze man wieder auf alle Seitenflächen derselben neue Pyramiden auf, von denen zwei Seitenflächen Verlängerungen der anliegenden Seitenflächen der ersten Pyramiden sind, und deren dritte durch den Schnitt der zwei genannten Seitenflächen mit den übereinstimmenden benachbarter Pyramiden bestimmt ist. An diesen Körper müssen dann noch 30 Zwickel angesetzt werden, welche die bis jetzt noch ausgelassenen mittlern Stücke der Kanten des Zwanzigflachs und die zwei davon ausgehenden Flächen zu Kanten und Flächen haben und sonst noch durch vier Flächen des bis dahin gebildeten Theiles begrenzt sind. Man kann auch das Modell aus dem auf Taf. II gezeichneten zusammenhängenden Netze des äusserlich sichtbaren Theiles unsres Zwanzigflachs herstellen. Fig. 26 zeigt die ganze dreieckige Seitenfläche desselben; die 9 schraffirten klei-


CANCELLED


3 2044 102 933 439